# 5 Multifaktorenmodelle

## 5.1 Einleitung

Das Capital Asset Pricing Model (CAPM) ist in den frühen 1960er-Jahren entstanden und stellt ein Einfaktormodell dar. Eine Alternative zu diesem Finanzmarktmodell ist die Arbitragepreis-Theorie (APT), die von Stephen Ross[1] in den 1970er-Jahren entwickelt wurde. Beim APT-Modell werden die Aktienrenditen nicht lediglich von einem einzelnen Faktor, sondern von einer Vielzahl an Marktfaktoren determiniert. Dabei geht die Risikodefinition des APT-Modells weiter als diejenige des CAPM, das die standardisierte Kovarianz bzw. das Beta einer Aktie zum Marktportfolio als Risiko bezeichnet. Beide Finanzmarktmodelle – das CAPM und die APT – implizieren eine lineare Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem systematischen Risiko.

In diesem Kapitel wird zunächst die Struktur von makroökonomischen und fundamentalen Multifaktorenmodellen aufgezeigt. Makroökonomische Multifaktorenmodelle können eingesetzt werden, um systematische Risikofaktoren wie etwa das Risiko von Konjunkturzyklen, Energiepreisen und Inflation zu messen und zu steuern. Die Rendite besteht aus einem erwarteten und einem unerwarteten Teil. Der erwartete Teil der Rendite lässt sich über ein Gleichgewichtsmodell wie das CAPM oder die APT ermitteln, während die unerwartete Renditekomponente durch vom Markt nicht vorweggenommene Veränderungen der makroökonomischen Faktoren bestimmt wird. Die APT unterstellt, dass die Marktpreise im Gleichgewicht sind und keine Arbitragemöglichkeiten bestehen. Im Rahmen des APT-Modells werden die Berechnung der erwarteten Rendite mit systematischen Risikofaktorprämien und das für ein Gleichgewichtsmodell wichtige Arbitrageprinzip beschrieben. Danach werden Beispiele von makroökonomischen Multifaktorenmodellen sowie von Modellen mit weitestgehend fundamentalen Faktoren wie das Fama/French-Modell und das Carhart-Modell aufgeführt. Anschließend wird der Einsatz von Multifaktorenmodellen in der Rendite- und Risikoattribution dargelegt, bevor

[1] Vgl. Ross 1976: The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, S. 341 ff.



E. Mondello, *Finance*, DOI 10.1007/978-3-658-13199-9_5

Portfolios vorgestellt werden, die lediglich einem spezifischen Risikofaktor (Faktorportfolios) oder einer bestimmten Gruppe von Risikofaktoren (z. B. die Risikofaktoren einer Benchmark bei einem Trackingportfolio) ausgesetzt sind. Am Ende des Kapitels werden mögliche Anwendungen der APT im Portfoliomanagement vorgestellt.

## 5.2 Übersicht über Multifaktorenmodelle

### 5.2.1 Einteilung der Multifaktorenmodelle

Das in Kapitel 4 beschriebene Marktmodell zerlegt das Risiko in eine systematische und eine unsystematische Komponente. Unsystematische bzw. unternehmensspezifische Risiken können in einem Portfolio durch Diversifikation eliminiert werden. Das systematische Risiko wird im Marktmodell durch einen Faktor – das Marktportfolio – wiedergegeben. Das Marktportfolio fasst die verschiedenen makroökonomischen Risikofaktoren zusammen. Die Rendite kann indessen auch über ein Multifaktorenmodell bestimmt werden, welches anstelle des Marktportfolios eine ganze Gruppe von systematischen Risikofaktoren verwendet. Die Aufteilung des systematischen Risikos in mehrere Faktoren erlaubt es, die Sensitivitäten von unterschiedlichen Aktien zu den einzelnen Faktoren zu berechnen. Dabei findet im Vergleich zum Einfaktormodell eine Verfeinerung der Rendite- und Risikoanalyse statt, weil mehrere Risikofaktoren für die Beschreibung der Aktienrenditen eingesetzt werden. Grundsätzlich lassen sich Multifaktorenmodelle in die folgenden drei Kategorien einteilen:

- Makroökonomische Faktormodelle: Die Risiken stellen unerwartete Veränderungen von makroökonomischen Variablen wie etwa das Wachstum des Bruttoinlandsprodukts und die Veränderung der Inflationsrate dar, welche die Aktienrenditen wesentlich erklären. Dabei beeinflussen die Faktoren die zukünftigen Cashflows eines Unternehmens oder den für das Diskontieren der Cashflows maßgebenden risikolosen Zinssatz (Teil des Diskontsatzes).
- Fundamentale Faktormodelle: Die Risikofaktoren beschreiben die Eigenschaften von Aktien und Unternehmen, die einen Einfluss auf die Aktienrendite haben. Die aktienspezifischen Risikofaktoren spiegeln die Erwartungen der Investoren über den zukünftigen Erfolg des Unternehmens wider. Dazu gehören Preismultiplikatoren wie das Kurs-Gewinn-Verhältnis, das Buchwert-Kurs-Verhältnis und die Dividendenrendite, aber auch die Marktkapitalisierung sowie aktienpreisbezogene Faktoren wie Preismomentum und Aktienpreisvolatilität. Die unternehmensbezogenen Faktoren hingegen beziehen sich auf die interne Unternehmensperformance. Sie setzen sich beispielsweise aus dem finanziellen Leverage sowie aus dem Wachstum, der Volatilität und dem Momentum des Unternehmensergebnisses zusammen.
- Statistische Faktormodelle: Anhand von statistischen Methoden können Faktoren aus historischen Renditen einer Gruppe von Finanzanlagen extrahiert werden, mit deren

Hilfe der Renditeverlauf erklärt werden kann. In den statistischen Faktormodellen sind die Faktoren durch ein Portfolio von Finanzanlagen der untersuchten Gesamtgruppe der Anlagen gegeben und somit als Portfoliogewichte definiert. Die beiden wichtigsten statistischen Faktormodelle stellen die Faktoranalyse und die Hauptkomponentenanalyse dar. Sie unterscheiden sich darin, dass die Faktoranalyse die historische Kovarianz der Portfoliorenditen und die Hauptkomponentenanalyse die historische Varianz der Portfoliorenditen erklären bzw. reproduzieren. Ein Vorteil von statistischen Faktormodellen ist, dass sie mit einer relativ geringen Zahl an Annahmen auskommen. Allerdings ist die Interpretation statistischer Faktoren im Gegensatz zu makroökonomischen und fundamentalen Faktoren üblicherweise schwieriger. In den allermeisten Fällen ist es nicht möglich, einen statistischen Faktor einem Faktor zuzuordnen, der eine ökonomische Interpretation zulässt. Eine Ausnahme stellt ein statistischer Faktor bestehend aus einem Portfolio mit Gewichten dar, die denjenigen eines Marktindex gleichen. Ein solcher Faktor kann als Marktfaktor aufgefasst werden. Darüber hinaus sind statistische Faktormodelle mathematisch recht anspruchsvoll.

Es gibt auch Multifaktorenmodelle, die sich nicht eindeutig einer dieser drei Kategorien zuordnen lassen, weil sie mehrere Eigenschaften in Bezug auf die Modelleinteilung besitzen.[2] Nachfolgend wird die Struktur von makroökonomischen und fundamentalen Multifaktorenmodellen beschrieben. Die statistischen Faktormodelle werden aufgrund der oben erwähnten Nachteile nicht weiter ausgeführt.

### 5.2.2 Struktur von makroökonomischen Multifaktorenmodellen

Die Rendite einer gehandelten Aktie besteht aus einer erwarteten und einer unerwarteten Komponente. Die erwartete bzw. normale Aktienrendite ist diejenige Komponente der Rendite, welche die Marktteilnehmer prognostizieren. Sie hängt von den auf dem Markt verfügbaren Informationen ab.[3] Ferner besteht die Rendite aus einem unsicheren oder unerwarteten Teil, der von überraschenden Nachrichten beeinflusst wird. Beispiele solcher nicht erwarteter Informationen sind etwa die Bekanntgabe von zu hohen Arbeitslosenzahlen, eine plötzliche Zinssatzerhöhung durch die Notenbank oder die unerwartete Pensionierung des Gründers und Verwaltungsratspräsidenten einer börsennotierten Gesellschaft.

Die Rendite einer Anlage über eine Periode t kann wie folgt bestimmt werden:[4]

$$\mathrm{r}_{\mathrm{i,t}} = \mathrm{E}\left(\mathrm{r}_{\mathrm{i,t}}\right) + \mathrm{u}_{\mathrm{i,t}}, \tag{5.1}$$

[2] Ein Beispiel ist das Fama/French-Modell, das sowohl einen makroökonomischen Faktor (Marktrisikoprämie) als auch zwei fundamentale Faktoren (Marktkapitalisierung und Buchwert-Kurs-Verhältnis) verwendet. Vgl. Abschn. 5.6.2.

[3] Für die Informationseffizienz der Märkte vgl. Abschn. 2.4.2.1.

[4] Faktormodelle erklären die zufälligen Renditen einzelner Anlagen, also ganze Verteilungen. Dabei entspricht der Erwartungswert dem erwarteten Teil der Rendite.

wobei:

$r_{i,t}$ = Rendite der Anlage i für die Periode t,
$E(r_{i,t})$ = erwarteter Teil der Rendite von Anlage i für die Periode t,
$u_{i,t}$ = unerwarteter Teil der Rendite von Anlage i für die Periode t.

Erwarten beispielsweise die Marktteilnehmer im nächsten Monat ein Wachstum des Bruttoinlandsprodukts von 0,5 %, dann fließt diese Erwartung in einem effizienten Markt in den Aktienpreis. Wird im nächsten Monat ein Anstieg des Bruttoinlandsprodukts von 0,5 % bekannt gegeben, haben die Marktakteure diese Meldung in den Aktienkursen bereits verarbeitet. Entspricht die Zunahme des Bruttoinlandsprodukts genau den Erwartungen, so verändert sich der Aktienkurs bzw. die Rendite aufgrund dieser Nachricht nicht. Falls hingegen eine Erhöhung des Bruttoinlandsprodukts um 1,5 % angekündigt wird, sind die Erwartungen der Marktteilnehmer um 1 % übertroffen worden, was in einem effizienten Markt zu einer Änderung der Aktienkurse bzw. der Rendite führt.

Der erwartete Teil einer Nachricht spiegelt sich in der Höhe der erwarteten Rendite [E (r)] wider. Die Überraschung ist derjenige Teil der Meldung, welchen die Marktteilnehmer nicht vorweggenommen bzw. erwartet haben. Dies schlägt sich im unerwarteten Teil (u) der Gesamtrendite (r) nieder. Das eigentliche Risiko einer Anlage wird durch den nicht erwarteten Teil der Rendite wiedergegeben, der auf eine überraschende Nachricht und eine daraus resultierende Preisänderung zurückzuführen ist.

Beziehen sich die nicht erwarteten Nachrichten auf generelle Marktfaktoren wie etwa die Höhe der Zinssätze oder das Wachstum des Bruttoinlandsprodukts, ist das daraus hervorgehende Risiko systematisch. Solche Nachrichten beeinflussen sämtliche Aktienkurse auf dem Markt. Stammen die Informationen hingegen von einem einzelnen Unternehmen, wie beispielsweise die unvorhergesehene Pensionierung des Gründers und Verwaltungsratspräsidenten einer Gesellschaft, wird lediglich der Aktienkurs des Unternehmens davon beeinflusst. Eine aus einer solchen Meldung induzierte Preisänderung wird als unternehmensspezifisches oder unsystematisches Risiko bezeichnet. Zusammengefasst lässt sich das Risiko wie folgt definieren:

- Als systematisches Risiko werden generelle Änderungen der Marktfaktoren verstanden, die zu einer Preisänderung bei einer Vielzahl von Anlagen führen.
- Unter unsystematischem Risiko versteht man Änderungen unternehmensspezifischer Gegebenheiten, die eine Preisänderung einer einzelnen Anlage oder einer kleinen Gruppe von Anlagen zur Folge haben.[5]

[5] Die Nachricht eines lokalen Streiks bei einem Autohersteller wird sehr wahrscheinlich den Aktienkurs des Unternehmens beeinträchtigen. Ferner ist es möglich, dass Kurse von anderen Gesellschaften derselben Industrie von dieser Meldung tangiert werden. Unwahrscheinlich ist hingegen, dass sich infolge des lokalen Streiks sämtliche Aktienkurse auf dem Markt verändern.

Der unerwartete Teil der Rendite (u) lässt sich in eine systematische und eine unsystematische Komponente aufteilen. Das führt zu folgender Rendite für eine Anlage:

$$r_{i,t} = E(r_{i,t}) + m_{i,t} + \varepsilon_{i,t}, \tag{5.2}$$

wobei:

$m_{i,t}$ = Renditeentschädigung für das systematische Risiko bzw. für das makroökonomische Risiko der Anlage i für die Periode t,
$\varepsilon_{i,t}$ = Renditeentschädigung für das unsystematische Risiko bzw. für das nicht makroökonomische Risiko der Anlage i für die Periode t.

Das systematische Risiko (m) beeinflusst die Aktien sämtlicher Gesellschaften. Wird beispielsweise eine überraschende Inflationsmeldung veröffentlicht, so wird dies einen Einfluss auf fast alle Unternehmen haben. Korreliert die Inflation positiv mit dem Aktienkurs, dann wird sich bei einem Anstieg der Geldentwertung der Kurs ebenfalls erhöhen. Besteht hingegen eine negative Korrelation, wird der Aktienpreis fallen. Sind die Aktienkurse mit der unerwarteten Inflationshöhe unkorreliert – was in der Realität jedoch eher selten der Fall ist –, übt die Geldentwertung keine Wirkung auf den Aktienpreis aus.

Das unsystematische Risiko (ε) ist unternehmensspezifisch und beeinträchtigt nicht das spezifische Risiko anderer Gesellschaften. Beispielsweise gibt es keine Wechselwirkung zwischen dem unternehmensspezifischen Risiko von Nestlé und Novartis. Muss etwa Nestlé ein hochrangiges Mitglied des Managements aufgrund von Korruptionsvorwürfen entlassen, dann kann diese unerwartete Nachricht den Aktienpreis verändern. Auf den Aktienpreis von Novartis hingegen wird diese Information keinen Einfluss haben. Das unsystematische Risiko der beiden Gesellschaften ist unabhängig voneinander bzw. nicht miteinander korreliert.

Das makroökonomische Multifaktorenmodell unterstellt, dass die Renditen mit den unerwarteten Meldungen über makroökonomische Variablen – wie Inflation, Bruttoinlandsprodukt und Zinssätze, die das systematische Risiko widerspiegeln – korrelieren. Die Rendite einer Anlage i über eine Periode t lässt sich mit einem makroökonomischen Modell wie folgt bestimmen (multiple lineare Regressionsanalyse):

$$r_{i,t} = E(r_{i,t}) + \beta_{i1}F_{1,t} + \beta_{i2}F_{2,t} + \ldots + \beta_{iK}F_{K,t} + \varepsilon_{i,t}, \tag{5.3}$$

wobei:

$F_{k,t}$ = unerwartete Höhe (Überraschung) des systematischen Risikofaktors k, $k = 1, 2, \ldots, K$,
$\beta_{ik}$ = Beta bzw. Faktorsensitivität zwischen Aktienrendite i und unerwartetem systematischen Risikofaktor k, $k = 1, 2, \ldots, K$,
$\varepsilon_{i,t}$ = Fehlerterm mit einem Erwartungswert von null, der den Anteil der Aktienrendite $r_i$ reflektiert, der nicht durch die systematischen Risikofaktoren erklärt wird und somit auf das unsystematische Risiko zurückzuführen ist.

Die makroökonomischen Risikofaktoren ($F_k$) stellen systematische Faktoren des Gesamtmarktes dar. Diese Faktoren weisen einen erwarteten Wert von null auf und beschreiben die unerwartete Veränderung und nicht die Höhe des Risikos. Das Beta ($\beta_{ik}$) ist ein Sensitivitätsfaktor und zeigt, wie stark die Aktienrendite auf das systematische Risiko reagiert. Ein positives Beta bedeutet, dass sich die Aktienrendite und beispielweise der Risikofaktor Inflation in die gleiche Richtung bewegen. Demgegenüber verkörpert ein negatives Beta eine inverse Beziehung zwischen der Rendite des Beteiligungspapiers und dem Risikofaktor Inflation. Der Fehlerterm ($\varepsilon_{i,t}$) erklärt die unerwartete Rendite aus dem unternehmensspezifischen Risiko.

**Beispiel**

**Berechnung der Aktienrendite mit einem makroökonomischen Multifaktorenmodell**

Die erwartete Rendite eines in der Computertechnologie tätigen Unternehmens liegt bei 10 %. Die Beta-Faktoren der Aktie zu unerwarteten Veränderungen der Zinssätze, der Inflation und des Bruttoinlandsprodukts sind bekannt und betragen −1,5, 2,0 und 0,75. Zu Beginn des Jahres erwartet man, dass sich die Zinssätze nicht verändern werden. Demgegenüber prognostiziert man, dass die Inflation um 3 % und das Bruttoinlandsprodukt um 1,2 % steigen werden. Am Ende des Jahres stellt man fest, dass die Zinssätze um 0,5 %, die Inflation um 4 % und das Bruttoinlandsprodukt um 0,7 % gestiegen sind. Ferner beträgt die unerwartete unternehmensspezifische Rendite 5 % für das Jahr. Wie hoch ist die Rendite der Aktie, wenn ein makroökonomisches Multifaktorenmodell verwendet wird?

**Lösung**

Nachstehend sind die Renditen und Beta-Faktoren der makroökonomischen Variablen aufgeführt:

| Makroökonomische Variablen | Total | Erwartet | Unerwartet (F) | Beta-Faktor (β) |
|---|---|---|---|---|
| Zinssätze | 0,5 % | 0,0 % | 0,5 % | −1,5 |
| Inflation | 4,0 % | 3,0 % | 1,0 % | 2,0 |
| Bruttoinlandsprodukt | 0,7 % | 1,2 % | −0,5 % | 0,75 |

Der unerwartete Teil der Rendite lässt sich für die einzelnen Risikofaktoren ($F_k$) anhand der gesamten und erwarteten Rendite wie folgt berechnen: Zinssätze 0,5 % (= 0,5 % − 0,0 %), Inflation 1,0 % (= 4,0 % − 3,0 %) und Bruttoinlandsprodukt −0,5 % (= 0,7 % − 1,2 %). Werden diese Risikofaktoren mit den entsprechenden Beta-Faktoren multipliziert, erhält man den Renditebeitrag von 0,875 % [= (−1,5) × 0,5 % + 2 × 1 % + 0,75 × (−0,5 %)] der drei makroökonomischen Variablen zur Gesamtrendite. Die erwartete Rendite der Aktie ist 10 %, während die unerwartete unternehmensspezifische Rendite bei 5 % liegt. Somit beläuft sich die Rendite der Aktie auf 15,875 %:

$$r_{\text{Aktie}} = 10\% + (-1{,}5) \times 0{,}5\% + 2 \times 1\% + 0{,}75 \times (-0{,}5\%) + 5\% = 15{,}875\%.$$

Die Aktienrendite beträgt 15,875 % und setzt sich aus den folgenden Bestandteilen zusammen:

- Erwartete Rendite: 10 %,
- unerwartete Rendite aus systematischen Risiken: 0,875 %,
- unerwartete Rendite aus unsystematischen Risiken: 5 %.

**Beispiel**

**Berechnung der Portfoliorendite mit einem makroökonomischen Multifaktorenmodell**

Ein Portfolio besteht aus den Aktien A und B. Die Renditen der beiden Aktien werden von den makroökonomischen Risikofaktoren Inflation ($F_{INFL}$) und Bruttoinlandsprodukt ($F_{BIP}$) beeinflusst. Der Portfoliomanager hat mithilfe einer multiplen linearen Regressionsanalyse ein makroökonomisches Multifaktorenmodell für die beiden Aktien A und B aufgestellt:

$$\begin{aligned}
\text{Rendite}_{A,t} &= 0{,}08 - 1{,}5 \times F_{INFL,t} + 1{,}2 \times F_{BIP,t} + \varepsilon_{A,t}, &\quad \text{wobei:}\quad \varepsilon_{A,t} &= 0{,}05,\\
\text{Rendite}_{B,t} &= 0{,}14 + 3 \times F_{INFL,t} + 4 \times F_{BIP,t} + \varepsilon_{B,t}, &\quad \text{wobei:}\quad \varepsilon_{B,t} &= 0{,}08.
\end{aligned}$$

Der Portfoliomanager investiert 25 % des Portfolios in Aktien von A und 75 % in Aktien von B. Wie hoch ist die Rendite des Portfolios, wenn die unerwartete Veränderung der Inflation und des Bruttoinlandsprodukts 1 % respektive 0,8 % sind?

**Lösung**

Die Portfoliorendite von 24,27 % lässt sich als gewichteter Durchschnitt der beiden Aktienrenditen wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
r_P = {} & [(0{,}25 \times 0{,}08) + (0{,}75 \times 0{,}14)] + [(0{,}25 \times (-1{,}5)) + (0{,}75 \times 3)] \times F_{INFL}\\
& + [(0{,}25 \times 1{,}2) + (0{,}75 \times 4)] \times F_{BIP} + [0{,}25 \times \varepsilon_A + 0{,}75 \times \varepsilon_B]\,,\\
r_P = {} & 0{,}125 + 1{,}875 \times F_{INFL} + 3{,}3 \times F_{BIP} + 0{,}25 \times \varepsilon_A + 0{,}75 \times \varepsilon_B,\\
r_P = {} & 0{,}125 + 1{,}875 \times 0{,}01 + 3{,}3 \times 0{,}008 + 0{,}25 \times 0{,}05 + 0{,}75 \times 0{,}08 = 0{,}2427.
\end{aligned}$$

Die Sensitivität des Portfolios hinsichtlich einer unerwarteten Veränderung der Inflation ist 1,875. Steigt die Inflation um 1 % höher als prognostiziert, dann fällt die Portfoliorendite um 1,875 % höher aus als erwartet. Der unsystematische Anteil an der Portfoliorendite beläuft sich auf 7,25 % (= 0,25 × 5 % + 0,75 × 8 %).

Die Portfoliorendite von 24,27 % setzt sich folgendermaßen zusammen:

- Erwartete Rendite: 12,5 %,
- unerwartete Rendite aus systematischen Risiken: 4,52 %,
- unerwartete Rendite aus unsystematischen Risiken: 7,25 %.

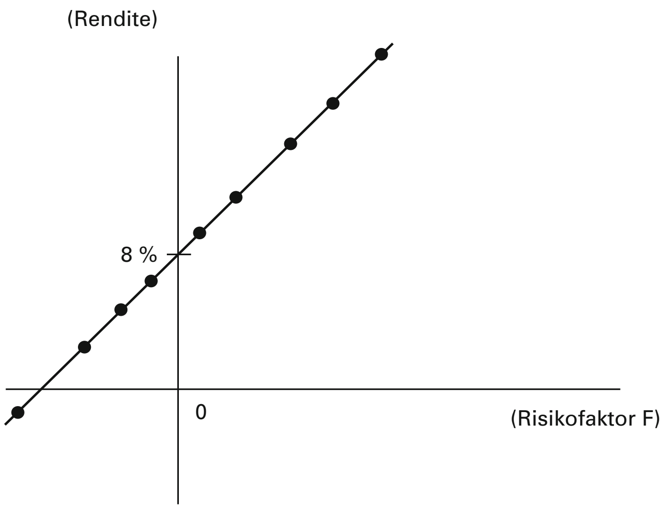


**Abb. 5.1** Rendite eines gut diversifizierten Portfolios mit einem Beta von 1

In gut diversifizierten Portfolios liegt eine Risikoprämie (erwartet und unerwartet) nur für das systematische Risiko vor. Die Gerade in Abb. 5.1 zeigt die Rendite eines gut diversifizierten Portfolios mit einem Beta von 1 für unterschiedliche Größen des Risikofaktors F (unerwartete Veränderung von F). Beim Schnittpunkt der Geraden mit der Y-Achse ist die Rendite des Portfolios 8 %, was der erwarteten Rendite bei einem Gleichgewichtsmodell wie etwa der APT entspricht. Bei diesem Punkt ist der systematische Risikofaktor null ($F = 0$). Dies bedeutet, dass keine unerwartete Veränderung des Risikofaktors vorliegt. Die erwartete Portfoliorendite lässt sich durch die erwartete Veränderung des Risikofaktors mithilfe eines Gleichgewichtsmodells berechnen. Ein positiver Risikofaktor ($F > 0$) führt zu einer Rendite, die höher als 8 % ist. Umgekehrt hat ein negativer Risikofaktor ($F < 0$) eine niedrigere Rendite als 8 % zur Folge. Daher lässt sich die Rendite des Portfolios wie folgt ermitteln:

$$r_P = E(r_P) + \beta_P F = 8\% + 1 \times F. \tag{5.4}$$

Abb. 5.2 zeigt die Rendite-Risikofaktor-Beziehung einer einzelnen Aktie mit einem Beta von 1. Die Aktie ist sowohl dem systematischen als auch dem unsystematischen Risiko ausgesetzt. Dieser Zusammenhang wird durch die Streuung der Rendite-Risikofaktor-Punkte um die Gerade veranschaulicht. Die Aktienrendite lässt sich durch ein Faktormodell mit systematischen Risikofaktoren nicht vollständig beschreiben, da die Aktienrendite auch durch das unsystematische Risiko beeinflusst wird. Im Gegensatz dazu kann die Rendite eines gut diversifizierten Portfolios durch ein Faktormodell mit systematischen Risikofaktoren quantifiziert werden.

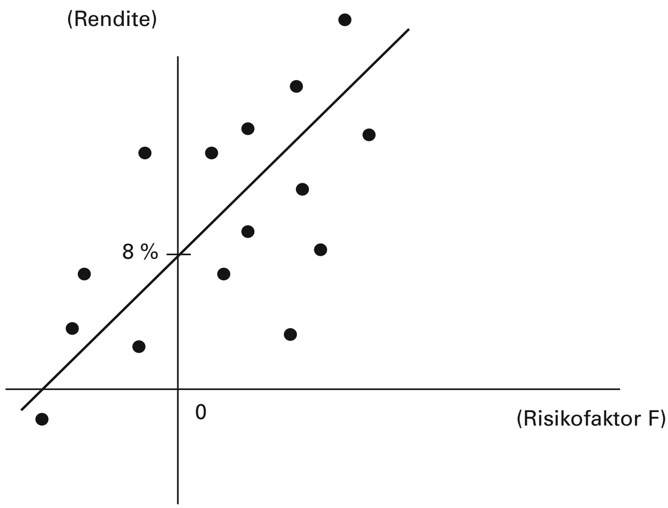


**Abb. 5.2** Rendite einer Aktie mit einem Beta von 1

### 5.2.3 Struktur von fundamentalen Multifaktorenmodellen

Die Rendite lässt sich anhand eines fundamentalen Multifaktorenmodells gleich wie bei einem makroökonomischen Multifaktorenmodell mit folgender Formel berechnen:

$$r_{i,t} = \alpha_{i,t} + \beta_{i1}F_{1,t} + \beta_{i2}F_{2,t} + \ldots + \beta_{iK}F_{K,t} + \varepsilon_{i,t}, \tag{5.5}$$

wobei:

$\alpha_{i,t}$ = Konstante der linearen multiplen Regressionsgleichung,
$F_{k,t}$ = fundamentaler Risikofaktor k, $k = 1, 2, \ldots, K$ (z. B. Kurs-Gewinn-Verhältnis, Buchwert-Kurs-Verhältnis, Dividendenrendite und finanzieller Leverage),
$\beta_{ik}$ = Beta bzw. Faktorsensitivität zwischen Aktienrendite i und fundamentalem Risikofaktor k, $k = 1, 2, \ldots, K$,
$\varepsilon_{i,t}$ = Fehlerterm.

Allerdings verändert sich im Gegensatz zum makroökonomischen Multifaktorenmodell die Bedeutung der Faktoren in der Gleichung. So werden die Faktoren als Renditen und nicht als Renditeüberraschungen angegeben, was dazu führt, dass deren erwartete Werte nicht null sind. Dieser Ansatz verändert die Bedeutung der Konstante, die nicht mehr als die erwartete Rendite interpretiert werden kann. Darüber hinaus können in den meisten fundamentalen Multifaktorenmodellen auch die Faktorsensitivitäten unterschiedlich ausgelegt werden. Dabei stellen die Faktorsensitivitäten standardisierte Größen wie etwa für das Kurs-Gewinn-Verhältnis oder die Dividendenrendite einer Aktie dar. Das standardisierte Beta bzw. die standardisierte Faktorsensitivität eines fundamentalen Multifaktorenmodells lässt sich zum Beispiel anhand des Kurs-Gewinn-Verhältnisses einer Aktie i wie folgt berechnen (ähnlich wie der z-Wert bei einer Standardnormalverteilung):

$$\beta_{i,1} = \frac{\mathrm{KGV}_i - \overline{\mathrm{KGV}}}{\sigma_{\mathrm{KGV}}}, \tag{5.6}$$

wobei:

$\mathrm{KGV}_i$ = Kurs-Gewinn-Verhältnis der Aktie i,
$\overline{\mathrm{KGV}}$ = durchschnittliches Kurs-Gewinn-Verhältnis der untersuchten Aktien,
$\sigma_{\mathrm{KGV}}$ = Standardabweichung der Kurs-Gewinn-Verhältnisse der untersuchten Aktien.

Die standardisierte Faktorsensitivität gibt die Anzahl der Standardabweichungen des fundamentalen Faktors von dessen Durchschnittswert bzw. Erwartungswert an. Hat beispielsweise eine Aktie ein standardisiertes Beta für das Kurs-Gewinn-Verhältnis von 2, so liegt das Kurs-Gewinn-Verhältnis des Beteiligungspapiers zweimal die Standardabweichung über dem KGV-Durchschnittswert. Eine Aktie hingegen mit einer standardisierten Faktorsensitivität von −1 besitzt ein Kurs-Gewinn-Verhältnis, das um eine Standardabweichung den KGV-Durchschnittswert unterschreitet. Durch diese Standardisierung können fundamentale Faktoren, die in unterschiedlichen Einheiten gemessen werden (z. B. Kurs-Gewinn-Verhältnis in absoluten Zahlen und Dividendenrendite in Prozent), ähnlich interpretiert werden. Eine Ausnahme bilden binäre Faktoren wie die Zugehörigkeit zu einer Industrie. Diese sogenannten Dummy-Variablen weisen entweder einen Wert von 0 oder 1 auf.[6]

**Beispiel**

**Berechnung der standardisierten Faktorsensitivität in einem fundamentalen Multifaktorenmodell**

Das Kurs-Gewinn-Verhältnis einer Aktie liegt bei 16,5. Demgegenüber betragen für sämtliche Aktien das durchschnittliche Kurs-Gewinn-Verhältnis 13,4 und die Standardabweichung der Kurs-Gewinn-Verhältnisse 6,1. Wie hoch ist die standardisierte Faktorsensitivität für den fundamentalen Faktor Kurs-Gewinn-Verhältnis der Aktie?

**Lösung**

Die standardisierte Faktorsensitivität für den fundamentalen Faktor Kurs-Gewinn-Verhältnis von 0,508 kann folgendermaßen ermittelt werden:

$$\beta_{i,\mathrm{KGV}} = \frac{16{,}5 - 13{,}4}{6{,}1} = 0{,}508.$$

[6] Für die Benutzung von Dummy-Variablen in einer Regression vgl. z. B. DeFusco et al. 2004: Quantitative Methods for Investment Analysis, S. 458 ff.

Das Kurs-Gewinn-Verhältnis der Aktie von 16,5 ist um 0,508 Standardabweichungen höher als das durchschnittliche Kurs-Gewinn-Verhältnis von 13,4.

Bei einem makroökonomischen Modell werden zuerst die Renditeüberraschungen (also die Risikofaktoren) bestimmt, bevor anhand einer Regression die Faktorsensitivitäten festgelegt werden. Demgegenüber werden in einem fundamentalen Multifaktorenmodell in einem ersten Schritt die Faktorsensitivitäten eruiert und erst danach die fundamentalen Renditefaktoren mithilfe einer Regression berechnet. Die fundamentalen Faktoren stellen Renditen dar, die sich beispielsweise aus der Renditedifferenz zwischen Aktien mit einem niedrigen und Aktien mit einem hohen Kurs-Gewinn-Verhältnis ergeben.

## 5.3 Diversifikation anhand eines makroökonomischen Multifaktorenmodells

Die Rendite einer Anlage i kann mit einem makroökonomischen Einfaktormodell wie folgt bestimmt werden:

$$r_{i,t} = E\left(r_{i,t}\right) + \beta_i F_t + \varepsilon_{i,t}. \tag{5.7}$$

Der Faktor für das systematische Risiko (F) kann beispielsweise eine unerwartete Nachricht über die Höhe der Inflation sein.[7] Das Beta ($\beta_i$) ist eine Faktorsensitivität und beschreibt, wie stark das systematische Risiko die Gesamtrendite der Aktie beeinflusst.

Nimmt man ein Portfolio mit N Aktien und benutzt für jede Aktie ein Einfaktormodell, um das systematische Risiko zu erfassen, lässt sich die Rendite des Portfolios als gewichteter Durchschnitt aller Aktienrenditen wie folgt berechnen:

$$r_P = w_1\left[E\left(r_1\right) + \beta_1 F + \varepsilon_1\right] + w_2\left[E\left(r_2\right) + \beta_2 F + \varepsilon_2\right] + \ldots + w_N\left[E\left(r_N\right) + \beta_N F + \varepsilon_N\right], \tag{5.8}$$

wobei:

$w_i$ = Gewichte der einzelnen Aktien i im Portfolio.

Die Formel zeigt, dass die Rendite des Aktienportfolios von drei Einflussfaktoren bestimmt wird:

- Die erwartete Rendite jeder einzelnen Aktie $[E(r_i)]$,
- das Beta ($\beta_i$) jeder einzelnen Aktie multipliziert mit dem systematischen Risikofaktor (F),
- das unsystematische bzw. unternehmensspezifische Risiko jeder einzelnen Aktie ($\varepsilon_i$).

[7] Als Einfaktormodell kann man auch das Marktmodell verwenden. In diesem Modell berechnet sich das systematische Risiko F als Differenz zwischen der realisierten und der erwarteten Marktrendite.

Teilt man diese drei Einflussfaktoren auf die Gesamtrendite des Portfolios in ihre Bestandteile auf, lässt sich (5.8) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} r_P \quad &= w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + \ldots + w_N E(r_N) \\ &\quad \text{(gewichteter Durchschnitt der erwarteten Renditen)} \\ &\quad + (w_1\beta_1 + w_2\beta_2 + \ldots + w_N\beta_N)\, F \\ &\quad \text{(gewichteter Durchschnitt der Betas)} \times \text{(systematischer Risikofaktor F)} \\ &\quad + w_1\varepsilon_1 + w_2\varepsilon_2 + \ldots + w_N\varepsilon_N \\ &\quad \text{(gewichteter Durchschnitt unsystematischer Risiken).} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Die erste Zeile der Formel – also der gewichtete Durchschnitt der erwarteten Renditen – beinhaltet keine Risikokomponente, da die erwartete Rendite im Aktienkurs bereits enthalten ist.[8] Die Verlustgefahr wird in der zweiten Zeile durch den Faktor F bestimmt, der das systematische Risiko darstellt. In der dritten Zeile wird die Ungewissheit durch den unsystematischen Risikofaktor $\varepsilon_i$ beschrieben.

Werden gut diversifizierte Portfolios betrachtet, verändert sich (5.9) dahingehend, dass die dritte Zeile, die das unsystematische Risiko wiedergibt, entfällt. Jede Aktie verfügt über ihr eigenes unsystematisches Risiko. Dabei führt eine unerwartete Meldung z. B. über einen unternehmensspezifischen Streik sehr wahrscheinlich zu einer Aktienkursänderung der betroffenen Gesellschaft, während andere Aktien von dieser Nachricht nicht betroffen sind. Wird nur ein kleiner Betrag in jede einzelne Aktie investiert, konvergiert der gewichtete Durchschnitt der unsystematischen Risiken in einem gut diversifizierten Portfolio gegen null.[9] Der Grund liegt darin, dass die unternehmensspezifischen Risiken unabhängig voneinander anfallen. Daher verstärkt sich der Diversifikationseffekt, je größer die Anzahl Aktien in einem Portfolio ist. Im Gegensatz dazu bleibt die zweite Zeile von (5.9) unverändert, da sich das systematische Risiko (F) nicht durch Diversifikation eliminieren lässt.

Der Diversifikationseffekt bei einem Portfolio bestehend aus Long-Positionen kann am Beispiel eines makroökonomischen Einfaktormodells aufgezeigt werden, wobei folgende Annahmen gelten:

- Alle im Portfolio enthaltenen Aktien verfügen über die gleiche erwartete Rendite, zum Beispiel 12 %. Diese Annahme führt dazu, dass die erste Zeile von (5.9) ebenfalls 12 % ist, da die erste Zeile den gewichteten Durchschnitt aller erwarteten Aktienrenditen darstellt.
- Sämtliche Aktien besitzen ein Beta von 1. Dies führt innerhalb des Klammerausdrucks der zweiten Zeile von (5.9) zu einem Wert von 1, weil die Summe der Gewichte 1 ist.

[8] Um den Preis bzw. den inneren Wert einer Aktie zu ermitteln, werden die frei verfügbaren Cashflows mit der erwarteten Rendite (Diskontsatz) diskontiert. Daher ist die erwartete Rendite im Aktienpreis enthalten.

[9] Wenn die Anzahl der in einem Portfolio gleich gewichteten Aktien gegen unendlich strebt, konvergiert der gewichtete Durchschnitt aller unsystematischen Risiken gegen null.

Multipliziert man 1 mit F, resultiert ein systematisches Risiko für dieses Portfolio von F = (= 1 × F).

- Jede Anlage ist zu gleichen Teilen im Portfolio vertreten. Der Anteil jeder einzelnen Aktie im Portfolio beträgt demnach 1/N.

Die Rendite des Aktienportfolios lässt sich aufgrund dieser Annahmen wie folgt eruieren:

$$r_P = 12\% + F + \frac{1}{N}\varepsilon_1 + \frac{1}{N}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{1}{N}\varepsilon_N. \tag{5.10}$$

Je mehr Aktien in das Portfolio aufgenommen werden, desto höher wird N, sodass die Terme $\frac{1}{N}\varepsilon_i$ gegen null streben. Demzufolge lässt sich (5.10) für ein gut diversifiziertes Portfolio wie folgt schreiben:

$$r_P = 12\% + F. \tag{5.11}$$

Dieses Ergebnis in Bezug auf den Diversifikationseffekt deckt sich mit (5.9), wo die dritte Zeile, die das unsystematische Risiko beschreibt, entfällt. Die zweite Zeile hingegen, die das systematische Risiko widerspiegelt, bleibt stehen. Das systematische Risiko, das durch die Variation des Faktors F gegeben ist, lässt sich durch Diversifikation nicht reduzieren. Das unsystematische Risiko hingegen lässt sich durch die Zunahme der Anzahl Aktien im Portfolio durch Diversifikation eliminieren.

In Kapitel 3 wurde der Diversifikationseffekt bei einem gleich gewichteten Portfolio bestehend aus Long-Positionen ebenfalls beschrieben. Dabei strebt das Risiko bei einem gut diversifizierten Portfolio gegen die durchschnittliche Kovarianz $\left(\overline{\mathrm{Cov}}\right)$.[10] In diesem Kapitel hingegen wird das systematische Risiko durch den Faktor F beschrieben. Da ein gemeinsamer Faktor F zu positiven Kovarianzen führt, sind die Argumente hinsichtlich des Diversifikationseffekts in beiden Kapiteln konsistent.

## 5.4 Erwartete Rendite

Die erwartete Rendite in einem makroökonomischen Multifaktorenmodell wird durch ein Gleichgewichtsmodell – kongruent zum CAPM oder der APT – berechnet. Im CAPM etwa wird die erwartete Rendite mit dem risikolosen Zinssatz und einer Risikoprämie ermittelt. Die Risikoprämie besteht aus der Marktrisikoprämie multipliziert mit dem Beta der Anlage bzw. des Portfolios und stellt die Renditeentschädigung für das systematische Risiko dar. Die CAPM-Formel für die Berechnung der erwarteten Rendite einer Anlage lautet:

$$E(r_i) = r_F + RP_M\beta_i, \tag{5.12}$$

wobei:

$RP_M$ = Marktrisikoprämie (Differenz zwischen der erwarteten Marktrendite und dem risikolosen Zinssatz).

[10] Für den Diversifikationseffekt vgl. Abschn. 3.6.

Die erwartete Rendite im CAPM ist um so höher, je höher das systematische Risiko ist und umgekehrt. Es wird unterstellt, dass im Gegensatz zum Marktmodell das Alpha null ist. Folglich sieht das CAPM keine Renditeentschädigung für das unsystematische Risiko vor, das durch jeden einzelnen Investor in einem Portfolio durch Diversifikation eliminiert werden kann.

Die erwartete Rendite kann auch über ein Multifaktorenmodell geschätzt werden. Dabei wird – ähnlich wie im CAPM - angenommen, dass das Risiko nur systematischer Natur ist. Im Gegensatz zum CAPM, das lediglich den Risikofaktor Marktrisikoprämie verwendet, werden bei einem Multifaktorenmodell mehrere systematische Risikofaktoren für die Berechnung der erwarteten Rendite eingesetzt. Nimmt man beispielsweise die beiden makroökonomischen Risikofaktoren Bruttoinlandsprodukt ($F_{BIP}$) und Inflation ($F_{INFL}$), kann die erwartete Rendite einer Anlage wie folgt berechnet werden:

$$E(r_i) = r_F + \beta_{BIP}F_{BIP} + \beta_{INFL}F_{INFL}. \tag{5.13}$$

Die Formel stellt eine Generalisierung der Wertpapiermarktlinie für die Bestimmung der erwarteten Rendite dar, wobei anstatt nur eines Faktors (die Marktrisikoprämie) mehrere systematische Faktoren verwendet werden.

Gleich wie beim CAPM lässt sich in einem Multifaktorenmodell die Risikoprämie eines Faktors mit einem Beta von 1 zu diesem Faktor und einem Beta von null zu allen anderen Faktoren bestimmen. Wird beim CAPM ein Beta von 1 unterstellt, dann setzt sich die Risikoprämie einzig aus der Marktrisikoprämie zusammen. Die Marktrisikoprämie plus dem risikolosen Zinssatz ergibt wiederum die erwartete Rendite der einzelnen Anlage.

**Beispiel**

**Berechnung der erwarteten Rendite bei einem Multifaktorenmodell**

Ein Gleichgewichtsmodell besitzt die beiden systematischen Risikofaktoren Bruttoinlandsprodukt und Inflation. Eine Anlage hat ein Beta für das Bruttoinlandsprodukt von 1,4 und ein Inflationsbeta von −0,8. Die erwartete Risikoprämie für das Bruttoinlandsprodukt beträgt 4 %, während die erwartete Risikoprämie für die Inflation bei −2 % liegt. Der risikolose Zinssatz beläuft sich auf 2,5 %. Wie hoch ist die erwartete Rendite der Anlage?

**Lösung**

Die erwartete Rendite setzt sich aus der Summe des risikolosen Zinssatzes und der erwarteten Risikoprämie zusammen. Die Risikoprämie für das Bruttoinlandsprodukt ist 5,6 % (= 1,4 × 4 %) und die Risikoprämie für die Inflation beläuft sich auf 1,6 % [= (−0,8) × (−2 %)]. Die erwartete Risikoprämie für die Anlage beträgt insgesamt 7,2 % (= 5,6 % + 1,6 %). Das führt zu einer erwarteten Rendite von 9,7 %:

$$E\left(r_{Anlage}\right) = 2{,}5\% + 1{,}4 \times 4\% + (-0{,}8) \times (-2\%) = 9{,}7\%.$$

## 5.5 Die Arbitragepreis-Theorie (APT)

### 5.5.1 Das APT-Modell

Die Arbitragepreis-Theorie (APT) beschreibt ähnlich wie das CAPM ein Kapitalmarktgleichgewicht bzw. eine Wertpapiermarktlinie, welche durch eine lineare Beziehung zwischen erwarteter Rendite und Risiko gekennzeichnet ist. Die APT kommt im Vergleich zum CAPM jedoch mit wesentlich weniger Annahmen aus. Die drei zugrunde liegenden Annahmen der APT lauten wie folgt:[11]

- Ein Faktormodell erklärt die Aktienrenditen, wobei das Modell die Faktoren nicht spezifiziert, welche die erwartete Portfoliorendite beeinflussen.
- Es gibt eine Vielzahl von Aktien, sodass die Investoren gut diversifizierte Portfolios halten, in denen das aktienspezifische Risiko eliminiert ist.
- Aufgrund der informationseffizienten Märkte bestehen keine Arbitragemöglichkeiten unter den gut diversifizierten Portfolios.[12]

Die APT benötigt damit weit weniger Annahmen als das CAPM. Nicht erforderlich sind insbesondere die folgenden Annahmen des CAPM: 1) Die Investoren verfügen über quadratische Nutzenfunktionen,[13] 2) die Aktienrenditen sind normalverteilt und 3) es gibt ein Marktportfolio, das aus sämtlichen risikobehafteten Anlagen besteht und das in Bezug auf die Rendite und das Risiko effizient ist. – Sind die Annahmen der APT erfüllt, lässt sich die erwartete Portfoliorendite wie folgt berechnen:

$$E(r_P) = r_F + \beta_{P,1}F_1 + \beta_{P,2}F_2 + \ldots + \beta_{P,n}F_n, \tag{5.14}$$

wobei:

$E(r_P)$ = erwartete Rendite des Portfolios,
$r_F$ = risikoloser Zinssatz,
$\beta_{P,i}$ = Sensitivität des Portfolios gegenüber dem Risikofaktor i, $i = 1, 2, \ldots, n$,
$F_i$ = Prämie des Risikofaktors i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Die Formel zeigt, dass die erwartete Rendite eines gut diversifizierten Portfolios aus einem risikolosen Zinssatz und einer Risikoprämie besteht. Die Risikoprämie stellt eine Entschädigung für das systematische Risiko dar. Die Prämie für einen Risikofaktor (oder auch Faktorpreis) $F_i$ lässt sich mit einem Faktorportfolio bestimmen. Ein Faktorportfolio ist ein gut diversifiziertes Portfolio, das ein Beta von 1 gegenüber einem bestimmten Risikofaktor und eine Sensitivität von 0 gegenüber allen anderen Risikofaktoren aufweist.

[11] Vgl. Ross 1976: The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, S. 341 ff.
[12] Eine Arbitragemöglichkeit liegt dann vor, wenn ein Investor einen risikolosen Gewinn erzielt, ohne dass er eine Nettoausgabe tätigen muss.
[13] Für die Nutzentheorie und die Indifferenzkurven vgl. Abschn. 3.7.3.

Die Rendite eines Faktorportfolios hängt von einem bestimmten makroökonomischen Risikofaktor ab. Alle anderen Risikofaktoren sind mit der Portfoliorendite unkorreliert und besitzen demnach ein Beta von 0. Es ist möglich solche Faktorportfolios zusammenzustellen, weil einerseits viele Anlagen für die Portfoliobildung zur Verfügung stehen und andererseits relativ wenige Risikofaktoren vorhanden sind.

**Beispiel**

**Berechnung der Prämie für den Risikofaktor anhand eines Faktorportfolios**

Ein Faktorportfolio verfügt über eine Sensitivität (Beta) von 1 hinsichtlich eines spezifischen Risikofaktors ($F_1$) und eine Sensitivität von 0 gegenüber allen anderen Faktoren. Die erwartete Portfoliorendite beträgt 10 %, während der risikolose Zinssatz bei 3 % liegt. Wie hoch ist die Prämie für den Risikofaktor $F_1$?

**Lösung**

Die erwartete Portfoliorendite kann mit einem Einfaktor-APT-Modell wie folgt berechnet werden:

$$E(r_P) = r_F + \beta_{P,1} F_1.$$

Wird die Gleichung nach der Risikoprämie $F_1$ aufgelöst, so erhält man einen Wert von 0,07:

$$F_1 = \frac{E(r_P) - r_F}{\beta_{P,1}} = \frac{0{,}1 - 0{,}03}{1} = 0{,}07.$$

Die erwartete Rendite des Faktorportfolios beträgt 10 % und setzt sich aus einem risikolosen Zinssatz von 3 % und einer Risikoprämie von 7 % zusammen. Die Risikoprämie besteht aus einem Beta von 1 und einer Prämie für den Risikofaktor von 7 %. Die Prämien für die weiteren Risikofaktoren können mit einem Faktorportfolio in der gleichen Weise berechnet werden.

**Beispiel**

**Berechnung der erwarteten APT-Portfoliorendite**

Die erwartete Rendite eines Portfolios wird mit folgendem Multifaktoren-APT-Modell ermittelt:

$$E(r_P) = r_F + \beta_{P,1} F_1 + \beta_{P,2} F_2.$$

Das Beta des ersten Risikofaktors ($\beta_{P,1}$) beträgt 0,3, während das Beta für den zweiten Risikofaktor ($\beta_{P,2}$) bei 0,92 liegt. Die Faktorportfolios für die Bestimmung der beiden Risikofaktorprämien ($F_1$ und $F_2$) weisen eine erwartete Rendite von 10 % respektive von 8 % auf. Der risikolose Zinssatz beläuft sich auf 2 %. Wie hoch ist die erwartete Portfoliorendite gemäß dem APT-Modell?

**Lösung**

Zunächst sind die beiden Risikofaktorprämien $F_1$ und $F_2$ zu berechnen (ein Faktorportfolio verfügt über ein Beta von 1):

$$F_1 = \frac{E(r_P) - r_F}{\beta_{P,1}} = \frac{0{,}1 - 0{,}02}{1} = 0{,}08,$$
$$F_2 = \frac{E(r_P) - r_F}{\beta_{P,2}} = \frac{0{,}08 - 0{,}02}{1} = 0{,}06.$$

Werden die Risikofaktorprämien in (5.14) eingesetzt, erhält man eine erwartete Portfoliorendite von 9,92 %:

$$E(r_P) = 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}08 + 0{,}92 \times 0{,}06 = 0{,}0992.$$

Wendet man die APT an, so müssen deren Parameter geschätzt werden. Die Parameter sind der risikolose Zinssatz und die Prämien für die Risikofaktoren, welche die erwartete Rendite beeinflussen. Die Faktorsensitivitäten (Betas) sind für jede einzelne Anlage verschieden und werden durch eine multiple lineare Regression bestimmt.

**Beispiel**

**Bestimmung der APT-Parameter (risikoloser Zinssatz und Risikofaktorprämie) in einem Einfaktormodell**

Es liegen drei gut diversifizierte Portfolios mit Sensitivitäten gegenüber einem einzigen Risikofaktor vor. Die gemäß APT-Modell erwarteten Portfoliorenditen und Faktorsensitivitäten (Betas) lauten wie folgt:

| Portfolios | Erwartete Portfoliorenditen [$E(r_P)$] | Faktorsensitivitäten ($\beta_{P,1}$) |
|---|---|---|
| A | 0,08 | 0,5 |
| B | 0,16 | 2,1 |
| C | 0,06 | 0,1 |

Wie hoch sind der risikolose Zinssatz und die Prämie für den Risikofaktor $F_1$?

**Lösung**

Um den risikolosen Zinssatz und die Risikofaktorprämie $F_1$ zu berechnen, können beispielsweise die ersten beiden Portfolios A und B ausgewählt werden:

$$E(r_A) = 0{,}08 = r_F + 0{,}5 \times F_1$$

und

$$E(r_B) = 0{,}16 = r_F + 2{,}1 \times F_1.$$

Wird Portfolio A nach dem risikolosen Zinssatz $r_F$ aufgelöst, so erhält man folgende Gleichung:

$$r_F = 0{,}08 - 0{,}5 \times F_1.$$

Wird dieser Formelausdruck für $r_F$ in die Gleichung über die erwartete Rendite des Portfolios B eingesetzt, gelangt man zu folgender Gleichung:

$$0{,}16 = 0{,}08 - 0{,}5 \times F_1 + 2{,}1 \times F_1 = 0{,}08 + 1{,}6 \times F_1.$$

Das führt zu einer Risikoprämie $F_1$ von 0,05:

$$F_1 = \frac{(0{,}16 - 0{,}08)}{1{,}6} = 0{,}05.$$

Wird nun $F_1$ in die Gleichung über die erwartete Rendite des Portfolios A eingesetzt, erhält man einen risikolosen Zinssatz ($r_F$) von 5,5 %:

$$0{,}08 = r_F + 0{,}5 \times 0{,}05 \Rightarrow r_F = 0{,}08 - 0{,}5 \times 0{,}05 = 0{,}055.$$

Demnach beträgt der risikolose Zinssatz 5,5 % und die Risikofaktorprämie beläuft sich auf 5 %. Diese APT-Parameter führen zu folgender APT-Gleichung:

$$E\,(r_P) = 0{,}055 + \beta_{P,1} \times 0{,}05.$$

### 5.5.2 Risikoarbitrage und Kapitalmarktgleichgewicht

Das APT-Modell setzt voraus, dass ein Kapitalmarktgleichgewicht vorliegt. Das heißt, dass bei gut diversifizierten Portfolios keine Fehlbewertungen bzw. Arbitragemöglichkeiten bestehen. Es ist nicht möglich, durch Transaktionen wie Kauf und Verkauf von Portfolios risikofreie Gewinne zu erzielen. Das Gesetz des einheitlichen Preises gibt an, dass Anlagen den gleichen Preis besitzen müssen, wenn sie in Bezug auf alle relevanten ökonomischen Aspekte gleichwertig sind. Das Gesetz des einheitlichen Preises wird durch Arbitrageure auf dem Markt umgesetzt, die unterbewertete Anlagen kaufen und überbewertete Anlagen verkaufen. Diese Transaktionen führen dazu, dass sich der Kapitalmarkt wieder im Gleichgewicht einpendelt.

Das APT-Modell basiert auf der Nicht-Arbitrage-Annahme. Liegt ein Ungleichgewicht vor, gehen Investoren große Geldpositionen ein, um einen risikolosen Arbitragegewinn zu erzielen. Folglich werden nur wenige Investoren benötigt, um das Gleichgewicht wiederherzustellen. Im Gegensatz dazu unterstellt das CAPM, dass Anleger bei einem Ungleichgewicht in Abhängigkeit von ihrem Risikoaversionsgrad nur limitierte Änderungen in ihrem Portfolio vornehmen. Sie schichten ihr effizientes Portfolio von überbewerteten zu unterbewerten Anlagen um. Das Gleichgewicht auf dem Markt wird durch eine große Anzahl von Investoren erreicht, die einen relativ kleinen Geldbetrag für diese Umschichtungen verwenden. Die Annahme, dass alle Anleger risikoavers sind und hinsichtlich Rendite und Risiko effiziente Portfolios halten, ist für das CAPM kritisch. Im Gegensatz dazu setzt die Nicht-Arbitrage-Annahme im APT voraus, dass wenige Marktteilnehmer genügen, um das Gleichgewicht mit großen Geldbeträgen wiederherzustellen. Das nachstehende Beispiel illustriert die für die Arbitragepreis-Theorie wichtige Annahme des Kapitalmarktgleichgewichts.[14]

**Beispiel**

**Testen von Arbitragemöglichkeiten: Kapitalmarktgleichgewicht**

Das Einfaktor-APT-Modell aus dem vorangegangenen Beispiel beschreibt die erwarteten Portfoliorenditen wie folgt:

$$E(r_P) = 0{,}055 + \beta_{P,1} \times 0{,}05.$$

Die erwarteten Portfoliorenditen und die entsprechenden Faktorsensitivitäten der Portfolios A, B, C und D lauten wie folgt:

| Portfolios | Erwartete Portfoliorenditen [$E(r_P)$] | Faktorsensitivitäten ($\beta_{P,1}$) |
|---|---|---|
| A | 0,08 | 0,5 |
| B | 0,16 | 2,1 |
| C | 0,06 | 0,1 |
| D | 0,09 | 0,4 |

1. Welches der vier Portfolios ist aufgrund des APT-Modells fehlbewertet?
2. Wie hoch ist der risikolose Arbitragegewinn, wenn man für die Arbitragestrategie die richtig bewerteten Portfolios A und C sowie einen Kapitalbetrag von EUR 100.000 einsetzt?

[14] In der Praxis wird der Begriff „Arbitrage“ sehr weitläufig verwendet. Oft versteht man unter Arbitrage das Auffinden fehlbewerteter Anlagen wie beispielsweise bei der Merger-Arbitragestrategie. Bei dieser Hedgefondsstrategie werden die Aktien von der zu übernehmenden Gesellschaft gekauft, während die Aktien des vermeintlichen Käufers verkauft werden. Diese Arbitragestrategie hat mit den risikolosen Arbitragemöglichkeiten im APT nichts gemeinsam. Um die Arbitrage im APT von anderen Strategien abzugrenzen, nennt man diese auch Risikoarbitrage.

**Lösung zu 1**

Um zu testen, ob Arbitragemöglichkeiten bestehen, wird das Einfaktor-APT-Modell auf alle vier Portfolios angewandt. Die erwarteten APT-Portfoliorenditen lassen sich wie folgt bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(r_A\right) &= 0{,}055 + 0{,}5 \times 0{,}05 = 0{,}08,\\
\mathrm{E}\left(r_B\right) &= 0{,}055 + 2{,}1 \times 0{,}05 = 0{,}16,\\
\mathrm{E}\left(r_C\right) &= 0{,}055 + 0{,}1 \times 0{,}05 = 0{,}06,\\
\mathrm{E}\left(r_D\right) &= 0{,}055 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}075.
\end{aligned}
$$

Die APT setzt voraus, dass sich der Kapitalmarkt im Gleichgewicht befindet, das heißt, dass gut diversifizierte Portfolios weder über- noch unterbewertet sind. Dies trifft auf die Portfolios A, B und C zu. Das Portfolio D hingegen verfügt gemäß APT über eine erwartete Rendite von 7,5 %, die im Vergleich zur erwarteten Rendite des Portfolios D von 9 % zu niedrig ist. Daher ist das Portfolio D unterbewertet und es besteht eine Arbitragemöglichkeit.[15]

Abb. 5.3 zeigt, dass sämtliche richtig bewertete Portfolios auf der Wertpapiermarktlinie liegen, die vom risikolosen Zinssatz durch alle Rendite-Beta-Punkte der Anlagekombinationen geht. Die Gleichung dieser Geraden erklärt die erwartete Rendite gut diversifizierter Portfolios. Portfolio D weist eine erwartete Rendite von 9 % auf. Es liegt demnach oberhalb der Rendite-Risiko-Geraden, die bei einer Faktorsensitivität von 0,4 eine erwartete Rendite von 7,5 % vorsieht. Folglich ist die Anlagekombination D unterbewertet. Außerdem veranschaulicht die Abbildung, dass die Risikoprämie proportional zum Beta steht. Die Risikoprämie ist durch die Differenz zwischen der erwarteten APT-Portfoliorendite und dem risikolosen Zinssatz gegeben. Bei einem Beta von 0 liegt auch die Risikoprämie bei 0, steigt aber bei einem höheren Beta proportional an.

**Lösung zu 2**

Es ist möglich, einen risikolosen Arbitragegewinn zu erzielen, indem man das unterbewertete Portfolio D kauft und eine Kombination aus den richtig bewerteten Portfolios A und C verkauft. Damit der Gewinn risikolos ist, muss die Faktorsensitivität der Long- und Short-Positionen gleich sein. Das Beta des Portfolios D beträgt 0,4. Folglich muss die Faktorsensitivität der verkauften Anlagekombination aus den Portfolios A und C ebenfalls 0,4 sein. Die Gewichte der Short-Position können als Durchschnitt der gewichteten Faktorsensitivitäten der Portfolios A und C wie folgt berechnet werden (die Summe der Gewichte ist 1):

$$0{,}4 = w_A \times 0{,}5 + (1 - w_A) \times 0{,}1.$$

[15] Eine höhere Renditeerwartung führt zu einem niedrigeren Marktwert des Portfolios, da die Cashflows aus den Anlagen mit einer höheren erwarteten Rendite diskontiert werden.

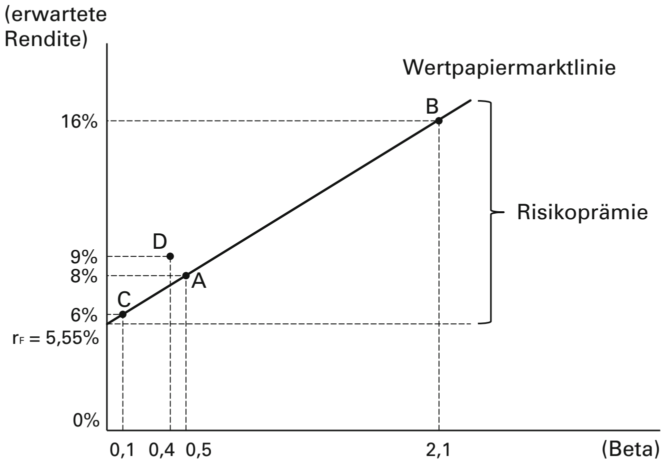


**Abb. 5.3** Arbitragemöglichkeit

Wird diese Gleichung ausmultipliziert, erhält man folgenden Formelausdruck:

$$0{,}4 = w_A \times 0{,}5 + 0{,}1 - w_A \times 0{,}1.$$

Wird diese Gleichung nach dem Gewicht von A ($w_A$) aufgelöst, gelangt man zu einem prozentualen Anteil des Portfolios A von 75 %:

$$0{,}3 = w_A \times 0{,}4 \Rightarrow w_A = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75.$$

Das Gewicht des Portfolios C beträgt demnach 25 % (= 1 − 0,75). Die Short-Position bestehend aus 75 % von A und 25 % von C weist eine Faktorsensitivität von 0,4 auf. Die erwartete Rendite dieser Anlagekombination ist 7,5 %:

$$E\,(r_{\mathrm{AundC}}) = 0{,}75 \times 0{,}08 + 0{,}25 \times 0{,}06 = 0{,}075.$$

Um den risikolosen Arbitragegewinn zu erzielen, kauft man die zu niedrig bewertete Anlage D für EUR 100.000 und finanziert diesen Kauf mit einer Short-Position aus der Portfoliokombination A und C für EUR 100.000. Die Cashflows aus dieser Arbitragestrategie können wie folgt berechnet werden:

- Die Portfoliokombination aus 75 % von A und 25 % von C wird zu einem Wert von EUR 100.000 leer verkauft, was am Ende der Periode zu einer erwarteten Ausgabe von EUR 107.500 (= EUR 100.000 × 1,075) führt.
- Das unterbewertete Portfolio D wird für EUR 100.000 gekauft. Die erwartete Rendite auf dem Markt beträgt 9 %, sodass am Ende der Periode ein Portfoliowert von EUR 109.000 (= EUR 100.000 × 1,09) anfällt.

**Tab. 5.1** Aus der Arbitragestrategie resultierende Cashflows und Risiko

| Portfolios | Cashflows zu Beginn der Periode (in EUR) | Cashflows am Ende der Periode (in EUR) | Faktorsensitivitäten |
|---|---|---|---|
| Long D | −100.000 | 109.000 | 0,4 |
| Short A und C | 100.000 | −107.500 | −0,4 |
| Total | 0 | 1500 | 0,0 |

Tab. 5.1 zeigt, dass der Netto-Cashflow zu Beginn der Arbitragetransaktionen EUR 0 ist. Am Ende der Periode (nach erfolgter Preiskorrektur) weist die Kapitalanlage D einen erwarteten Wert von EUR 109.000 auf, während die Portfoliokombination von A und C eine erwartete Ausgabe – aus dem zu Beginn der Periode getätigten Leerverkauf – von EUR 107.500 besitzt. Dies führt zu einem Gewinn von EUR 1500 (= EUR 109.000 – EUR 107.500).

Diese Arbitragestrategie weist kein Risiko auf, da sich die Faktorsensitivitäten der Long- und Short-Positionen gegenseitig aufheben. Daher ist der Arbitragegewinn von EUR 1500 risikolos.

Die Marktteilnehmer werden das unterbewertete Portfolio D kaufen, was dazu führt, dass der Preis dieser Anlage steigt und die Renditeerwartung sinkt. Diese Preiskorrektur dauert so lange, bis der Markt wieder im Gleichgewicht ist und keine Über- und Unterbewertungen mehr vorhanden sind. Ist der Markt im Gleichgewicht, befinden sich sämtliche Portfolios auf der Wertpapiermarktlinie.

### 5.5.3 APT versus CAPM

Die APT kann in den gleichen Finanzmarkttheorieanwendungen wie das CAPM verwendet werden. Die erwarteten Renditen werden als Richtgrößen unter anderem in der Auswahl von unter- oder überbewerteten Anlagen, Performancemessung und Aktienbewertung eingesetzt. Beide Finanzmarktmodelle unterscheiden zwischen dem systematischen und dem unsystematischen Risiko. Eine Renditeentschädigung besteht nur bei der systematischen Verlustgefahr, weil das unternehmensspezifische Risiko im Rahmen der Portfoliobildung durch Diversifikation eliminiert werden kann.

Das APT-Modell unterstellt, dass der Kapitalmarkt im Gleichgewicht ist und daher keine Arbitragemöglichkeiten vorhanden sind. Ist diese Annahme verletzt, führen starke Arbitragekräfte dazu, dass das Gleichgewicht wieder hergestellt und die Fehlbewertung korrigiert wird. Dazu braucht es nur eine limitierte Anzahl von Investoren, die mit großen Geldbeträgen die Arbitragetransaktionen durchführen. Die erwartete Rendite-Risiko-Beziehung im APT basiert auf gut diversifizierten Portfolios, die lediglich dem systematischen Risiko ausgesetzt sind und durch eine Vielzahl von Anlagen konstruiert werden können.

Das CAPM hingegen wird durch das Marktportfolio hergeleitet (Kapitalmarktlinienmodell), das sich auf dem Markt nicht beobachten lässt. Das Modell unterstellt, dass die

Anlagen auf dem Markt in Bezug auf Rendite und Risiko effizient sind. Ist eine Anlage hinsichtlich der Beziehung zwischen erwarteter Rendite und Beta unter- oder überbewertet, findet eine Preiskorrektur durch eine große Anzahl von Investoren mit relativ kleinen Geldbeträgen statt. Dabei werden die Portfolios von überbewerteten zu unterbewerteten Titeln umgeschichtet, bis sich das Gleichgewicht wieder eingestellt hat.

Trotz dieser Vorteile der APT gegenüber dem CAPM bestehen wesentliche Nachteile. Die APT geht von gut diversifizierten Portfolios aus und stützt sich auf die Nicht-Arbitrage-Annahme. Daher kann man mit dem Modell Verletzungen der Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Beta, die bei einzelnen Anlagen auftreten, nicht identifizieren. Ferner sind die Risikofaktoren im APT-Modell nicht bekannt, während das CAPM diesen Faktor mit der Marktrisikoprämie definiert hat. Aus diesen Gründen kann das CAPM nicht einfach durch die APT ersetzt werden.

### 5.5.4 Empirische Relevanz

Das Hauptproblem beim Testen der APT besteht darin, dass die Risikofaktoren im Modell nicht spezifiziert sind. Daher setzt die empirische Untersuchung der APT voraus, dass man zuerst die Risikofaktoren definiert. In einem zweiten Schritt müssen die Portfolios zusammengestellt werden, die diesen Risikofaktoren ausgesetzt sind. In einem letzten Schritt ist der Erklärungsgehalt der Risikofaktoren für die erwarteten Portfoliorenditen zu untersuchen.

Roll und Ross (1980) überprüften das APT-Modell mit einem zweistufigen Verfahren.[16] Zuerst ermittelten sie für einzelne Anlagen die erwarteten Renditen und Faktorsensitivitäten aus historischen Datenreihen. Danach untersuchten die Autoren die erwartete Rendite-Risiko-Beziehung mit diesen geschätzten Parametern im APT. Im Speziellen analysierte die Studie, ob die erwarteten Renditen mit den Risikofaktoren konsistent waren. Dabei wurde die Rendite-Risikofaktoren-Beziehung mit einem Hypothesentest überprüft. Die Nullhypothese lautete, dass Risikofaktoren ($F_i, \ldots, F_n$; für $i = 1, 2, \ldots, n$) vorhanden sind, die ungleich null sind, sodass:

$$E(r_1) - r_F = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \ldots + \beta_n F_n. \tag{5.15}$$

Die Faktorsensitivitäten ($\beta_i$) wurden mithilfe der Faktoranalyse bestimmt. Die betrachtete Zeitreihe von täglichen Renditen deckte die Periode von Juli 1962 bis Dezember 1972 ab. Aktien wurden nach alphabetischer Reihenfolge in 42 Portfolios zu je 30 Aktien aufgeteilt. Der Test zeigte, dass mit einem risikolosen Zinssatz von 6 % mindestens drei, aber wahrscheinlich nicht mehr als vier Risikofaktoren relevant sind. Ferner ist die Bedeutung der ersten beiden Risikofaktoren groß, während die verbleibenden Faktoren eine unterschiedliche Gewichtung hinsichtlich deren Relevanz aufweisen. Wenn das Modell für die Bestimmung des risikolosen Zinssatzes verwendet wird, sind nur noch zwei Risikofaktoren signifikant. Dies stellt einen Hinweis dar, dass die ursprüngliche Schätzung von drei

[16] Vgl. Roll und Ross 1980: An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory, S. 1073 ff.

Risikofaktoren nicht korrekt ist. Ein weiterer Test benutzte zusätzlich zu den identifizierten Risikofaktoren die Standardabweichung der Anlagen. Die Standardabweichung sollte die erwartete Rendite nicht beeinflussen, weil die APT unterstellt, dass die Risikofaktoren das systematische Risiko wiedergeben und die unsystematische Verlustgefahr null beträgt. Die Ergebnisse des Tests zeigten, dass die Standardabweichung der Anlagen statistisch signifikant ist, was gegen die APT spricht. In der gleichen Studie korrigierten Roll und Ross die Ergebnisse um die Schiefe (Skewness) und stellten fest, dass die Standardabweichung statistisch nicht signifikant ist, was das APT-Modell wiederum unterstützt. Außerdem wurde überprüft, ob die gleichen Faktoren die verschiedenen Portfolios beeinflussen. Dabei wurde analysiert, ob der Achsenabschnitt bzw. der risikolose Zinssatz bei allen Portfolios ungefähr gleich ist. Die Ergebnisse zeigten, dass keine statistische Evidenz besteht, dass der Achsenabschnitt unterschiedlich ist. Die Autoren der Studie gelangten zu dem Schluss, dass die APT durch die empirischen Tests grundsätzlich unterstützt wird.

Dhrymes, Friend und Gultekin (1984) analysierten die statistischen Methoden von vorangegangenen Studien. Die Autoren konnten eine Reihe von wesentlichen Schwachstellen aufzeigen, welche die APT infrage stellen.[17] Die Bildung von Portfolios mit zum Beispiel 30 Aktien war aufgrund der begrenzten Computerkapazitäten in älteren Studien notwendig. Die Autoren konnten keine Rendite-Risikofaktoren-Beziehung zwischen einem Portfolio aus 30 Aktien und einer Anlagekombination aus 240 Aktien finden. Des Weiteren konnten sie keine bestimmte Anzahl Risikofaktoren für unterschiedlich große Portfolios identifizieren. Zum Beispiel konnten 15 Anlagen mit einem Zweifaktorenmodell, 30 Anlagen mit einem Dreifaktorenmodell, 45 Anlagen mit einem Vierfaktorenmodell, 60 Anlagen mit einem Sechsfaktorenmodell und 90 Anlagen mit einem Neunfaktorenmodell beschrieben werden. Ebenfalls war es schwierig, mit mehreren Risikofaktoren zu bestimmen, welche der Faktoren statistisch signifikant die Renditen erklären. In einer weiteren Studie im Jahre 1986 wiederholten die Autoren die vergangenen Tests mit größeren Anlagekombinationen.[18] Die Portfolios von je 30 Aktien wurden hier auf 60 und 90 Aktien erhöht. Das Resultat zeigte, dass die Anzahl Risikofaktoren mit der Zunahme der Aktien steigt. Dabei handelte es sich nicht nur um systematische, sondern auch um unsystematische Risikofaktoren. Zudem lassen sich die erwarteten Renditen auch durch die Standardabweichungen beschreiben. Ferner beeinflusste die Portfoliogröße den Achsenabschnitt des Modells. Die empirischen Ergebnisse der Studie verwarfen die APT, weil die Beziehung zwischen erwarteter Rendite und Risikofaktoren instabil ist und der im Modell implizierte risikolose Zinssatz von der Portfoliogröße und der Länge der historischen Datenreihe abhängt.

Weitere empirische Studien zeigten ebenfalls gemischte Resultate hinsichtlich der Validität der APT. Ähnlich wie die Kritik von Roll an dem CAPM stellte Shanken (1982)

[17] Vgl. Dhrymes et al. 1984: A Critical Re-Examination of the Empirical Evidence on the Arbitrage Pricing Theory, S. 323 ff.

[18] Vgl. Dhrymes et al. 1985: New Tests of the APT and Their Implications, S. 659 ff.

die empirische Überprüfbarkeit der APT infrage.[19] Bevor man die APT überprüfen kann, sind die relevanten Risikofaktoren, welche die Renditen beeinflussen, zu bestimmen. Da diese nicht bekannt sind, kann das Modell nicht getestet werden.

## 5.6 Multifaktorenmodelle in der Praxis

### 5.6.1 Makroökonomische Faktormodelle

Das Hauptproblem der Multifaktoren-APT besteht darin, dass die relevanten Risikofaktoren im Modell nicht gegeben sind. Um die Risikofaktoren zu bestimmen, sind zwei Grundprinzipien zu berücksichtigen. Erstens muss es sich um systematische (also makroökonomische) Risikofaktoren handeln, die einen Einfluss auf die Renditen von Anlagen haben. Zweitens müssen die Investoren bereit sein, eine Risikoprämie für diese Risikofaktoren zu verlangen.

Chen, Roll und Ross (1986) entwickelten ein makroökonomisches Multifaktorenmodell.[20] Sie wiesen für US-Aktien statistisch nach, dass die folgenden fünf makroökonomischen Variablen die durchschnittlichen Aktienrenditen erklären:

- Prozentuale Veränderung der Industrieproduktion (IP),
- prozentuale Veränderung der erwarteten Inflation (EI),
- prozentuale Veränderung der unerwarteten Inflation (UI),
- Renditedifferenz zwischen langfristigen Unternehmensanleihen und langfristigen Staatsanleihen (US),
- Renditedifferenz zwischen langfristigen Staatsanleihen und Treasury Bills (ST).

Die Bestimmung der Höhe jedes einzelnen Risikofaktors erfolgt aufgrund historischer Daten von Aktienrenditen. Dabei genügt es nicht, einen statistischen Zusammenhang zwischen einem makroökonomischen Faktor und den Aktienrenditen aufzuzeigen. Vielmehr muss die ökonomische Interpretation plausibel sein. Beispielsweise beeinflusst die Inflation die Cashflows eines Unternehmens sowie den Diskontsatz. Die Cashflows und der Diskontsatz bzw. die erwartete Rendite sind wichtige Größen für die Bestimmung eines inneren Aktienwerts. Änderungen in der Industrieproduktion beeinflussen die erwirtschafteten Cashflows eines Betriebes, was eine Aktienpreisänderung zur Folge haben kann. Das Multifaktorenmodell von Chen et al. erklärt die Aktienrenditen mit fünf makroökonomischen Risikofaktoren für eine Anlageperiode t wie folgt:

$$\mathrm{r}_{\mathrm{i,t}} = \alpha_{\mathrm{i}} + \beta_{\mathrm{i,IP}}\mathrm{IP}_{\mathrm{t}} + \beta_{\mathrm{i,EI}}\mathrm{EI}_{\mathrm{t}} + \beta_{\mathrm{i,UI}}\mathrm{UI}_{\mathrm{t}} + \beta_{\mathrm{i,US}}\mathrm{US}_{\mathrm{t}} + \beta_{\mathrm{i,ST}}\mathrm{ST}_{\mathrm{t}} + \varepsilon_{\mathrm{i,t}}. \tag{5.16}$$

Bei der Formel handelt es sich um eine multiple lineare Regressionsgleichung mit fünf unabhängigen Variablen bzw. makroökonomischen Risikofaktoren. Mit der Regressions-

[19] Vgl. Shanken 1982: The Arbitrage Pricing Theory: Is It Testable?, S. 1129 ff.
[20] Vgl. Chen et al. 1986: Economic Forces and the Stock Market, S. 383 ff.

analyse werden die Betas bzw. Regressionskoeffizienten bestimmt. Der Fehlerterm $\varepsilon_{i,t}$ misst den Renditebeitrag aus dem unternehmensspezifischen Risiko.

Burmeister, Roll und Ross (1994) stellten ein makroökonomisches Multifaktorenmodell vor, das die Renditen von US-Aktien aufgrund folgender fünf Variablen erklärt:[21]

- „Confidence Risk" (CF) : unerwartete Veränderung der Renditedifferenz zwischen risikobehafteten Unternehmensanleihen und risikolosen Staatsanleihen mit einer Laufzeit von 20 Jahren. Ist das Vertrauen (Confidence) der Investoren groß – z. B. in einer Hochkonjunkturphase –, dann fällt die Risikoprämie zwischen Unternehmens- und Staatsanleihen. Die Anleger kaufen vermehrt Unternehmensanleihen, was zu einem höheren Preis und einer niedrigeren Rendite führt. Folglich nimmt die Renditedifferenz ab. In schlechten Zeiten hingegen – z. B. in einer Rezession – sinkt das Vertrauen der Anleger. Es findet ein Verkauf von Unternehmensanleihen statt, was einen niedrigeren Preis und eine höhere Rendite zur Folge hat. Die Preise von Aktien, die dieser Verlustgefahr positiv ausgesetzt sind ($\beta_{i,CF} > 0$), steigen, was zu einer höheren Aktienrendite führt.[22]
- „Time Horizon Risk" (TR): unerwartete Veränderung der Renditedifferenz zwischen 20-jährigen Staatsanleihen und 30-tägigen Treasury Bills. Dieser Risikofaktor misst die Veränderung der Zinsstrukturkurve und beschreibt die Bereitschaft der Investoren, in langfristige Papiere anzulegen. Ein positiver Risikofaktor ($TR > 0$) bedeutet, dass die Preise langfristiger Anleihen im Vergleich zu den Preisen 30-tägiger Treasury Bills gestiegen sind. Demzufolge erwarten Investoren für das Halten von langfristigen Anleihen eine niedrigere Rendite. Je kleiner die Renditedifferenz ist, desto mehr wird langfristig investiert. Die Preise von Aktien, die dieser Verlustgefahr positiv ausgesetzt sind ($\beta_{i,TR} > 0$), steigen, was zu einer höheren Aktienrendite führt.
- „Inflation Risk" (IR): unerwartete Veränderung der Inflation. Viele Aktienpreise sind negativ zu diesem Faktor korreliert. Eine nicht vorweggenommene Zunahme der Inflation ($IR > 0$) führt in der Regel zu einer niedrigeren Rendite aufgrund fallender Aktienpreise und umgekehrt. Die Risikoexposition zur Inflation ist bei den meisten Aktien negativ ($\beta_{i,IR} < 0$). Industrien, die Luxusprodukte herstellen und vertreiben, weisen die höchste Sensitivität gegenüber der Inflation auf. Nimmt das reale Einkommen aufgrund der Inflation ab, sinkt die Nachfrage nach Luxusgütern. Das führt zu niedrigeren Gewinnen beispielsweise bei Einzelhändlern, Erbringern von Dienstleistungen, Restaurants und Hotels. Demgegenüber sind Industrien, die tägliche Notwendigkeiten wie etwa Lebensmittel und Schuhe produzieren, weniger dem Inflationsrisiko ausgesetzt.
- „Business Cycle Risk" (BR): unerwartete Änderung der realen Geschäftsaktivitäten (reale Wachstumsrate der Wirtschaft). Eine Erhöhung des Risikofaktors ($BR > 0$) signalisiert ein Wirtschaftswachstum, was für eine zyklische Aktie (z. B. Autoindustrie) zu einem höheren Preis und einer höheren Rendite führt.

[21] Vgl. Burmeister et al. 1994: A Practitioner's Guide to Arbitrage Pricing Theory, S. 1 ff.
[22] Ein höherer Aktienpreis ($P_1$) hat eine höhere Rendite zur Folge: Rendite $= (P_1 - P_0)/P_0$.

**Tab. 5.2** Überschussrendite des S&P 500

| Risikofaktoren | Faktorsensitivitäten des S&P 500 gegenüber den Risikofaktoren | Risikoprämien (in % pro Jahr) | Beitrag der Faktoren auf die erwartete Rendite (in % pro Jahr) |
|---|---|---|---|
| Confidence Risk (CF) | 0,27 | 2,59 | 0,70 (= 0,27 × 2,59) |
| Time Horizon Risk (TR) | 0,56 | −0,66 | −0,37 [= 0,56 × (−0,66)] |
| Inflation Risk (IR) | −0,37 | −4,32 | 1,60 [= (−0,37) × (−4,32)] |
| Business Cycle Risk (BR) | 1,71 | 1,49 | 2,55 (= 1,71 × 1,49) |
| Market Timing Risk (MR) | 1,00 | 3,61 | 3,61 (= 1,00 × 3,61) |
| Erwartete Überschussrendite | | | 8,09 |

- „Market Timing Risk" (MR): Dieser Risikofaktor beschreibt denjenigen Renditeanteil des S&P 500 (systematisches Gesamtrisiko), der nicht durch den Achsenabschnitt und die ersten vier systematischen Faktoren erklärt wurde (wie etwa Naturkatastrophen, politische Veränderungen und steigende oder fallende Aktienmärkte). Fast alle Aktien weisen einen positiven Zusammenhang ($\beta_{i,MR} > 0$) zu diesem Faktor auf. Der letzte dieser fünf Risikofaktoren spiegelt die Ungewissheit wider, dass die ersten vier systematischen Faktoren die Renditen nicht vollständig zu erklären vermögen.[23]

Diese fünf systematischen Risikofaktoren können eingesetzt werden, um die Renditen gut diversifizierter Aktienportfolios zu erklären. Die Anwendung des Modells auf einzelne Aktien bringt weniger gute Ergebnisse. Burmeister, Roll und Ross (1994) verwendeten den S&P 500 als Portfolio, um die Wirkung der fünf Risikofaktoren auf die Überschussrenditen (Differenz zwischen Portfoliorendite und dem risikolosen Zinssatz der Treasury Bill) von gut diversifizierten US-Portfolios zu zeigen. Tab. 5.2 zeigt die Faktorsensitivitäten des S&P 500 gegenüber den fünf systematischen Risikofaktoren und beschreibt die Berechnungsweise der S&P-500-Rendite über dem risikolosen Zinssatz.

Die erwartete APT-Rendite des S&P 500 lässt sich wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned} E\left(r_{S\&P\,500}\right) &= r_F + 0{,}27 \times CF + 0{,}56 \times TR + (-0{,}37) \times IR + 1{,}71 \times BR + 1{,}00 \times MR \\ &= r_F + 8{,}09\,\%. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Gl. (5.17) und Tab. 5.2 zeigen, dass der S&P 500 – außer bei der Inflation – positive Faktorsensitivitäten besitzt. Die beiden größten Beiträge zur Überschussrendite stammen vom

[23] Eine Risikoexposition gegenüber den ersten vier systematischen Risikofaktoren von null ($\beta_{i,CF} = 0, \ldots, \beta_{i,BR} = 0$) führt dazu, dass das Market Timing Risk in einer proportionalen Beziehung zur Gesamtrendite des S&P 500 steht. Liegen diese unrealistischen Bedingungen vor, entspricht die Risikoexposition der Aktie gegenüber dem Market Timing Risk derjenigen des Betas im CAPM.

Market Timing Risk (3,61 %) und Business Cycle Risk (2,55 %). Die über dem Treasury-Bill-Satz erwartete Rendite beträgt 8,09 %. Liegt der risikolose Zinssatz beispielsweise bei 2 %, dann ergibt sich eine jährliche erwartete Rendite des S&P 500 von 10,09 % (= 2 % + 8,09 %).

### 5.6.2 Fama/French-Modell

Neben den makroökonomischen Modellen werden in der Praxis auch Multifaktorenmodelle mit fundamentalen Faktoren benutzt. In solchen Modellen werden die Aktienrenditen durch aktienbezogene und unternehmensspezifische Eigenschaften wie das Kurs-Gewinn-Verhältnis, das Buchwert-Kurs-Verhältnis, die Unternehmensgröße und den finanziellen Leverage erklärt. Das von Fama und French (1996) entwickelte Dreifaktorenmodell erklärt die Aktienrenditen anhand der Aktienmarktrisikoprämie ($R_M$), der Größe des Unternehmens (SMB) und dem Buchwert-Kurs-Verhältnis (HML). Der erste Risikofaktor stellt einen Faktor für den Aktienmarkt dar, während die Unternehmensgröße und das Buchwert-Kurs-Verhältnis fundamentale Faktoren sind. Mit dem Dreifaktorenmodell kann die überschüssige Rendite für eine Periode $R_{i,t}$ ($R_{i,t} = r_{i,t} - r_F$) folgendermaßen ermittelt werden:[24]

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_{i,M} R_{M,t} + \beta_{i,SMB} SMB_t + \beta_{i,HML} HML_t + \varepsilon_{i,t}, \tag{5.18}$$

wobei:

$R_M$ = Renditedifferenz zwischen einem marktgewichteten Aktienindex und einer risikolosen Anlage (Treasury Bill mit einer Laufzeit von 1 Monat); dieser Risikofaktor entspricht der Marktrisikoprämie im CAPM,

SMB = Renditedifferenz zwischen drei Aktienportfolios mit kleiner Marktkapitalisierung und drei Aktienportfolios bestehend aus Beteiligungspapieren mit großer Marktkapitalisierung; dieser Risikofaktor für die Unternehmensgröße stellt somit eine Überschussrendite für Aktien geringer Marktkapitalisierung dar (Small minus Big),

HML = Renditedifferenz zwischen zwei Portfolios mit großem Buchwert-Kurs-Verhältnis und zwei Portfolios mit kleinem Buchwert-Kurs-Verhältnis; Aktien mit einem hohen Buchwert-Kurs-Verhältnis (bzw. einem niedrigen Kurs-Buchwert-Verhältnis)

[24] Vgl. Fama und French 1996: Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies, S. 55 ff. Das Fama/French-Modell stellt strenggenommen kein fundamentales Multifaktorenmodell dar, da zum einen ein makroökonomischer Faktor (Marktrisikoprämie) verwendet wird und zum anderen die Risikofaktoren als Überschussrenditen angegeben werden, sodass eine Standardisierung der Faktorsensitivitäten nicht erforderlich ist.

besitzen eine Wertorientierung (Value Bias), während Aktien mit einem niedrigen Buchwert-Kurs-Verhältnis über eine Wachstumsorientierung (Growth Bias) verfügen; dieser Risikofaktor spiegelt eine Überschussrendite für den zu niedrigen Wert einer Aktie mit großem Buchwert-Kurs-Verhältnis wider (High minus Low),

$\alpha_i$ = erwartete Rendite aus unternehmensspezifischen Risiken (nicht SMB und HML).

Unterstellt man eine erwartete Rendite und einen Fehlerterm aus unternehmensspezifischen Risiken von null ($\alpha_i = 0$ und $\varepsilon_{i,t} = 0$), so lässt sich die Aktienrendite im Fama/French-Modell wie folgt bestimmen:

$$r_{i,t} = r_F + \beta_{i,M} R_{M,t} + \beta_{i,SMB} SMB_t + \beta_{i,HML} HML_t. \tag{5.19}$$

Die drei Risikofaktoren – $R_M$, SMB und HML – können als durchschnittliche Rendite eines Long-Short-Portfolios mit einer Nettoinvestition von null betrachtet werden. Der Faktor $R_M$ repräsentiert eine Short-Position in risikolose Anlagen und eine Long-Position in dem Marktportfolio. Der Faktor SMB reflektiert die durchschnittliche Rendite einer Short-Position in Aktien mit großer Marktkapitalisierung, wobei der Geldzufluss aus dem Leerverkauf in Wertpapiere mit geringer Marktkapitalisierung investiert wird. HML hingegen verkörpert die durchschnittliche Rendite aus einer Short-Aktienposition mit einem niedrigen Buchwert-Kurs-Verhältnis und einer Anlage der daraus resultierenden Geldmittel in Papieren mit einem großen Buchwert-Kurs-Verhältnis.

Zusätzlich zur überschüssigen Marktrendite werden im Fama/French-Modell die Aktienrenditen durch zwei weitere fundamentale Risikofaktoren (SMB und HML) erklärt. Daher ist das Beta für die Marktrisikoprämie nicht identisch mit dem Beta aus dem CAPM. Die Risikofaktoren im Modell können wie folgt in zwei Gruppen aufgeteilt werden:

- Ein Risikofaktor für den Aktienmarkt ($R_M$), der ähnlich wie beim CAPM das marktbezogene Risiko wiedergibt,
- zwei Risikofaktoren – Größe (SMB) und Wert (HML) –, welche fundamentale Eigenschaften des Unternehmens beschreiben.

Die beiden Risikofaktoren Größe und Wert wurden durch Fama und French aufgrund von empirischen Ergebnissen ausgewählt, die zeigen, dass die beiden Faktoren die Renditeabweichung vom CAPM zu erklären vermögen. Zum Beispiel sind Unternehmen mit geringer Marktkapitalisierung der Gefahr ausgesetzt, dass sie keinen oder nur einen ungenügenden Zugang zum privaten und öffentlichen Kreditmarkt haben. Aktien mit einem hohen Buchwert-Kurs-Verhältnis können einen niedrigen Aktienpreis wegen unternehmerischer Probleme aufweisen. Grundsätzlich haben Unternehmen mit einem hohen Buchwert-Kurs-Verhältnis finanzielle Schwierigkeiten, während Gesellschaften mit geringer Marktkapitalisierung dann potentielle Probleme bekunden, wenn sich das geschäftliche Umfeld verändert. Folglich stellen die beiden Risikofaktoren Größe und Wert eine Renditeentschädigung für diese Verlustgefahren dar.

**Beispiel**

**Erwartete CAPM-Rendite und Fama/French-Modell**

Ein Portfoliomanager möchte die erwartete Rendite der Gamma-Aktie mithilfe des CAPM und des Fama/French-Modells bestimmen. Die einfache lineare Regressionsanalyse zwischen den überschüssigen Aktienrenditen und den Marktrenditen liefert für das CAPM folgendes Ergebnis:

- Beta = 1,24 (das Beta ist statistisch signifikant),
- $R^2 = 0{,}39$.

Die Marktrisikoprämie beträgt 7,2 %, während der risikolose Zinssatz bei 2 % liegt.

Die multiple lineare Regressionsanalyse zwischen den überschüssigen Aktienrenditen und den drei Risikofaktoren Markt ($R_M$), Größe (SMB) und Wert (HML) führt zu folgenden Ergebnissen (Fama/French-Modell):

- Beta für die Marktrisikoprämie ($R_M$) = 1,31,
- Beta für die Größe (SMB) = −0,46,
- Beta für den Wert (HML) = 0,57,
- die Regressionskoeffizienten (Betas) sind statistisch signifikant,
- $\alpha_i = 0$,
- $\varepsilon_{i,t} = 0$,
- $R^2 = 0{,}36$.

Die Risikoprämie für die Größe und den Wert beläuft sich auf 3,5 % respektive auf 5,3 %.

Wie hoch ist die erwartete Rendite der Gamma-Aktien gemäß CAPM und Fama/French-Modell?

**Lösung**

Die erwartete CAPM-Rendite von 10,928 % lässt sich wie folgt berechnen:

$$E(r_{Gamma}) = 2\% + 1{,}24 \times 7{,}2\% = 10{,}928\%.$$

Die erwartete Rendite gemäß dem Fama/French-Modell von 12,843 % lässt sich mit den drei Risikofaktoren Aktienmarkt ($R_M$), Größe (SMB) und Wert (HML) folgendermaßen bestimmen:

$$E(r_{Gamma}) = 2\% + 1{,}31 \times 7{,}2\% + (-0{,}46) \times 3{,}5\% + 0{,}57 \times 5{,}3\% = 12{,}843\%.$$

Die erwartete Rendite von 12,843 % unterstellt, dass die unternehmensspezifische Renditekomponente null beträgt ($\alpha_i = 0$ und $\varepsilon_{i,t} = 0$). Ferner zeigt das Fama/French-Modell, dass die Aktie von Gamma einen negativen erwarteten Renditebeitrag von

1,61 % [= (−0,46) × 3,5 %] zum Risikofaktor Größe aufweist, während der Faktor Wert einen positiven Renditebeitrag von 3,021 % (= 0,57 × 5,3 %) liefert.

Davis, Fama und French (2000) testeten das Fama/French-Modell in ihrer Studie empirisch.[25] Sie gelangten zu dem Schluss, dass der Achsenabschnitt aus der multiplen linearen Regressionsanalyse ($\alpha_i$) klein und grundsätzlich statistisch nicht signifikant ist. Der Determinationskoeffizient bei den untersuchten Portfolios bestehend aus US-Aktien liegt bei über 0,90. Darüber hinaus sind die Regressionskoeffizienten für die beiden Risikofaktoren Größe und Wert statistisch signifikant mit hohen t-Statistiken. Diese Ergebnisse zeigten, dass die Risikofaktoren im Modell die Renditen von Aktienportfolios gut erklären. Eine mögliche Interpretation dieser empirischen Resultate besteht darin, dass Größe und Wert komplementär zum CAPM die Verlustgefahren erfassen. Dieser Erklärungsansatz ist mit dem APT-Modell konsistent und unterstellt, dass Größe und Wert systematische Risikofaktoren darstellen. Eine andere Interpretation ist, dass diese Risikoprämien für Wert und Größe auf das irrationale Verhalten von Investoren zurückzuführen sind (Behavioral Bias).

### 5.6.3 Carhart-Modell

Das Vierfaktorenmodell von Carhart (1997) stellt eine Erweiterung des Fama/French-Modells dar, das zusätzlich zu den drei Faktoren Marktrisikoprämie, Größe und Wert einen Faktor für das Momentum umfasst.[26] Gemäß dem Carhart-Modell gibt es drei Gruppen von Aktien, mit denen im Vergleich zur Aktienmarktexposition tendenziell eine höhere Rendite erwirtschaftet werden kann:

- Aktien mit einer kleinen Marktkapitalisierung,
- Aktien mit einem hohen Buchwert-Kurs-Verhältnis und
- Aktien mit steigenden Preisen (Momentum).

Wird in Aktien mit steigenden Preisen investiert, kann man vom Momentum der Wertpapiere profitieren und so eine höhere Rendite erzielen. Mit dem Carhart-Modell kann die überschüssige Rendite für eine Periode ($R_{i,t} = r_{i,t} - r_F$) folgendermaßen berechnet werden:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_{i,M} R_{M,t} + \beta_{i,SMB} SMB_t + \beta_{i,HML} HML_t + \beta_{i,WML} WML_t + \varepsilon_{i,t}, \qquad (5.20)$$

wobei:

WML = Rendite eines gleich gewichteten Aktienportfolios mit den Gewinnern des vergangenen Jahres (30 % der Aktien mit der höchsten Rendite) abzüglich der Ren-

[25] Vgl. Davis et al. 2000: Characteristics, Covariances, and Average Returns, 1929 to 1997, S. 389 ff.
[26] Vgl. Carhart 1997: On Persistence in Mutual Fund Performance, S. 57 ff.

dite eines gleich gewichteten Aktienportfolios mit den Verlierern des vergangenen Jahres (30 % der Aktien mit der niedrigsten Rendite); also die Renditedifferenz zwischen einem Long-Aktienportfolio mit Gewinnern und einem Short-Aktienportfolio mit Verlierern (Winners minus Losers).

Geht man von einer erwarteten Rendite und einem Fehlerterm aus unternehmensspezifischen Risiken von null aus ($\alpha_i = 0$ und $\varepsilon_{i,t} = 0$), kann die Aktienrendite im Carhart-Modell wie folgt ermittelt werden:

$$r_{i,t} = r_F + \beta_{i,M} R_{M,t} + \beta_{i,SMB} SMB_t + \beta_{i,HML} HML_t + \beta_{i,WML} WML_t. \tag{5.21}$$

Im Carhart-Modell stellen Größe, Wert und Momentum fundamentale Risikofaktoren dar, für die von den Marktteilnehmern eine Renditeentschädigung verlangt wird. Dabei werden die Risikofaktoren als Renditedifferenzen angegeben. Diese drei fundamentalen Risikofaktoren sind für die Konstruktion von Aktienportfolios wichtig. Die Ausrichtung einer aktiven Anlagestrategie auf diese drei Faktoren ermöglicht dem Portfoliomanager eine im Vergleich zum Marktrisiko überschüssige Rendite zu erwirtschaften. Neben der Aktienauswahl kann das Carhart-Modell auch in der Performanceevaluation in Form einer Rendite- und Risikoattribution eingesetzt werden.

## 5.7 Ausgewählte Anwendungen von Multifaktorenmodellen

Multifaktorenmodelle können in der Anlageanalyse und im Portfoliomanagement vielfältig eingesetzt werden. Im Folgenden werden die Renditeattribution, die Risikoattribution und die Konstruktion eines Faktor- sowie Trackingportfolios beschrieben. Die Rendite- und Risikoattribution erfolgt mit einem Multifaktorenmodell, das sich primär auf fundamentale Risikofaktoren stützt, da sich die Analyse auf die Rendite- und Risikodifferenz zwischen dem Portfolio und der Benchmark bezieht. Dabei ist die Benchmark gut diversifiziert oder spiegelt einen bestimmten Anlagestil wider, sodass sie grundsätzlich den systematischen Risikofaktoren ausgesetzt ist, während das Portfolio sowohl systematische als auch unsystematische Risikokomponenten aufweist. Mit Faktor- und Trackingportfolios lässt sich mithilfe von makroökonomischen Multifaktorenmodellen eine gewünschte Risikoexposition erreichen.

### 5.7.1 Renditeattribution

Der Einsatz von Multifaktorenmodellen ermöglicht eine detaillierte Abweichungsanalyse zwischen den Renditen des Portfolios und der Benchmark. Dabei spiegelt die Benchmark einen passiven Anlagestil wider. Nachfolgend wird die Renditeattribution einfachheitshalber anhand eines Portfolios bestehend aus inländischen Aktien gezeigt. Die Rendite