



**Universität
Zürich^{UZH}**

Institut für Finance

Financial Economics (22BO0012)

Skript FS 2026

Prof. Dr. Thorsten Hens¹

¹ Herzlichen Dank an das Teaching Center für das Verfassen des Skriptes und an Leandro Josias Bentele für Hinweise, die geholfen haben, das Skript korrekter und präziser zu machen.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Statistik und Mathematik	1
1.2	Effizienzmarkthypothese	9
1.3	Herleitung von Renditeverteilungen	12
1.4	Die Verteilung von Renditen	16
1.5	Erklärung der Abweichung von der Normalverteilung	18
2	Portfoliotheorie und Portfoliooptimierung	22
2.1	Repetition: Risiko und Rendite im Portfolio	22
2.2	Risiko eines Portfolios mit n Anlagen	26
2.3	Portfoliotheorie	30
2.4	Repetition: Risikoneigung von Individuen	35
2.5	Nutzenmaximierende Portfolios	38
3	Capital Asset Pricing Model [CAPM]	40
3.1	Grafische Herleitung der Security Market Line	40
3.2	Eine wichtige Marktidentität	43
3.3	Herleitung der Security Market Line	44
3.4	Die CAPM Gleichung, die SML	47
3.5	Systematisches Risiko (Beta)	47
3.6	Abweichung von der SML (Alpha)	50
3.7	Anwendung in der Praxis	53
4	CAPM mit heterogenen Erwartungen	55
4.1	Herleitung der SML unter heterogenen Erwartungen	55
4.2	Definition des Alphas	57
4.3	Was ist der Unterschied der beiden Definitionen des Alphas eines Investors?	58
4.4	Aktiv oder passiv anlegen?	59
5	Empirie des CAPM	62
5.1	Einführung in die Multi-Faktor-Modelle	62
5.2	Fama-French Modell	64
5.3	Empirie und Anomalien	65
6	CAPM mit Hintergrundrisiken	69
6.1	Annahmen	69
6.2	Maximierungsproblem	70
6.3	Bedeutung für die SML	71
6.4	Value Prämie und Low-Beta Anomalie	72
7	CAPM mit heterogenem Verhalten	75

8	Vom CAPM zur Evolutionary Finance	77
9	Evolutionary Finance: Anlagestrategien	81
9.1	Mean-Variance	81
9.2	Carry	81
9.3	Value	82
9.4	Momentum	82
9.5	Growth	82
9.6	Faktor	82
9.7	Grossartige Investoren	82
10	Evolutionary Model	84
10.1	Einführung	84
10.2	Analogie zur Biologie	84
10.3	Ein Evolutionäres Finanz-Modell	86
10.4	Der Global Portfolio One	93
10.5	Anwendung der Evolutionären Portfoliotheorie zur Dynamisierung des CAPM	95
	Literaturverzeichnis	99

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1:	Histogramm einer Beispiel-Renditeverteilung	1
Abbildung 1.2:	Normalverteilung II	4
Abbildung 1.3:	Renditen im Effizienten Markt	9
Abbildung 1.4:	Grafische Darstellung der Effizienzmarkthypothese	11
Abbildung 1.5:	Klassifizierung Markteffizienz	12
Abbildung 1.6:	Binomialmodell über eine Periode	13
Abbildung 1.7:	Binomialmodell über zwei Perioden	13
Abbildung 1.8:	Pascal'sches Dreieck	15
Abbildung 1.9:	Galton Brett	16
Abbildung 1.10:	Normalverteilung	17
Abbildung 1.11:	Normalverteilung und Lognormalverteilung	17
Abbildung 1.12:	Log-Renditen des S&P 500 (monatliche Daten 1871-2018)	19
Abbildung 1.13:	Kursverlauf NASDAQ während der Internetblase	19
Abbildung 1.14:	Populationsdynamik entlang Spekulationsblasen	20
Abbildung 1.15:	Kursverlauf S&P 500 von 1900-2018	21
Abbildung 2.1:	Historische Renditeverteilung am CH-Kapitalmarkt (1925 – 1997)	22
Abbildung 2.2:	Risiko-Rendite-Diagramm anhand Anlageklassen (USA 1990 – 2010)	23
Abbildung 2.3:	Erwartetes Portfoliorisiko aus zwei risikobehafteten Wertpapieren in Abhängigkeit der Korrelation	26

Abbildung 2.4: «Naive» Diversifikationsregel anhand Renditen SMI (15.07.2024)	28
Abbildung 2.5: Efficient Frontier	31
Abbildung 2.6: Efficient Frontier mit risikolosem Zinssatz	32
Abbildung 2.7: Capital Allocation Line	33
Abbildung 2.8: Tangentialportfolio	34
Abbildung 2.9: Bevorzugte Richtung eines risikoaversen Investors in der μ - σ -Welt	36
Abbildung 2.10: Indifferenzkurve	37
Abbildung 2.11: Optimales Gesamtportfolio eines konservativen versus dynamischen Investors	38
Abbildung 3.1: Grafische Herleitung der Security Market Line I	40
Abbildung 3.2: Grafische Herleitung der Security Market Line II	41
Abbildung 3.3: Überführung der Capital Market Line [CML] in die Security Market Line [SML]	43
Abbildung 3.4: Regressionslinie für ABB bezogen auf den SPI	48
Abbildung 3.5: Schwankungen eines defensiven und zyklischen Titels gegenüber dem Markt	49
Abbildung 3.6: Abweichung von der Security Market Line (positives Alpha)	51
Abbildung 5.1: Aufspaltung des Risikos im CAPM und in Multi-Faktor-Modellen	63
Abbildung 5.2: Average Annualized Monthly Return versus Beta for Value Weight Portfolios Formed on Prior Beta, 1928–2003	66
Abbildung 5.3: Average Annualized Monthly Return versus Beta for Value Weight Portfolios Formed on B/M, 1963–2003	67
Abbildung 6.1: Rechenbeispiel SML mit Hintergrundrisiken [HR]	73
Abbildung 7.1: Erklärung der Daten von Fama und French (2014) mittels heterogenem Verhalten	76
Abbildung 9.1: Grossartige Investoren	83
Abbildung 10.1: Binomialprozess	87

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Eintrittswahrscheinlichkeiten zwei-Perioden-Binomialmodell	14
Tabelle 2: Rendite und Risiko von unterschiedlichen Anlageklassen (USA 1990 – 2010)	23
Tabelle 3: Beta-Werte für SMI Titel	50
Tabelle 4: Von Investoren zu Strategien	85
Tabelle 5: Dynamik der CAPM-Betas	98

1 Grundlagen

Das erste Kapitel gibt eine kleine Auffrischung in Statistik und Mathematik und dient dem besseren Verständnis der nachfolgenden Inhalte. Im weiteren Verlauf des Kapitels wird die Effizienz von Finanzmärkten näher betrachtet und es wird gezeigt unter welchen Annahmen, Aktien einer Normalverteilung folgen.

1.1 Statistik und Mathematik

1.1.1 Wahrscheinlichkeit

$i = 1, \dots, n$ mögliche Ereignisse

p_1, \dots, p_n Wahrscheinlichkeit des Eintreffens

Mit $p_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ und $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Zufallsvariable x mit Ausprägungen $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

Beispiel Münzwurf:

$$x_1 = \text{Kopf}, x_2 = \text{Zahl}$$

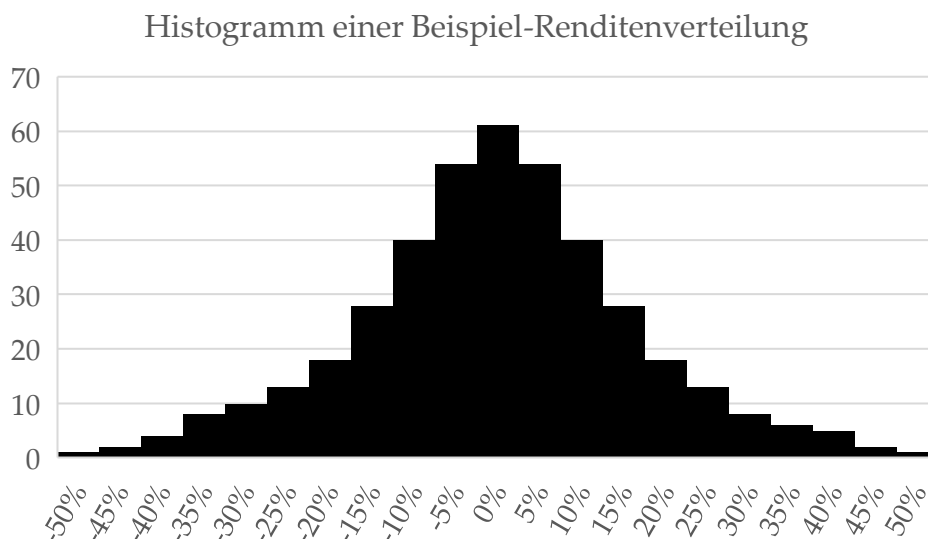
$$p_1 = 0.5, p_2 = 0.5$$

Beispiel Renditen einer Aktie:

$$x_1 < -50\%, x_2 = [-50\%, -45\%), x_3 = [-45\%, -40\%), \dots, x_n > 50\%$$

p_1, \dots, p_n kann dann als Histogramm dargestellt werden:

Abbildung 1.1: Histogramm einer Beispiel-Renditeverteilung



Quelle: Eigene Darstellung.

1.1.2 Die Momente einer Verteilung

Eine Verteilung kann anhand ihrer zugehörigen Momente charakterisiert werden. Sind alle Momente einer Verteilung bekannt, so ist die exakte Verteilung ebenfalls bekannt. In der Praxis werden in der Regel die folgenden Kennzahlen verwendet:

1. Erwartungswert (auch Mittelwert, erstes Moment)
2. Varianz (zweites, zentralisiertes Moment)
3. Schiefe (drittes, normalisiertes Moment)
4. Kurtosis (viertes, normalisiertes Moment)

Die folgenden Formeln können für eine Population angewandt werden, d.h. wenn die Werte, die man analysiert, der Grundgesamtheit entsprechen und nicht von einer Stichprobe auf die Population geschlossen werden soll (Inferenz).

Der Erwartungswert einer Stichprobe wird als ein mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichteter arithmetischer Durchschnitt über alle Werte berechnet:

$$\mu = \sum_{i=1}^n p(x_i) x_i \quad (1.1)$$

wobei:

$p(x_i)$: Wahrscheinlichkeit, dass x_i als Wert eintritt. Statt $p(x_i)$ wird oftmals auch die Notation p_i verwendet.

Der Erwartungswert oder Mittelwert besagt, welcher Wert bei der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung im Durchschnitt angenommen wird.

Die Varianz stellt die quadratische Abweichung zum Erwartungswert dar. Die Varianz wird mit σ^2 bezeichnet. σ ist die Standardabweichung und wird wie folgt berechnet:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n p(x_i) (x_i - \mu)^2} \quad (1.2)$$

Die Standardabweichung ist eine Kennzahl dafür, wie sehr die Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung vom Mittelwert abweichen. In der Praxis wird in der Regel mit der Standardabweichung anstatt der Varianz gearbeitet.

Die Schiefe gibt Auskunft über die Symmetrie einer Verteilung, also wie die Werte relativ zum Mittelwert verteilt sind. Um die Schiefe verschiedener Verteilungen vergleichen zu können, ist die Schiefe als ein durch Mittelwert und Standardabweichung normiertes Mass definiert. Die Schiefe einer Normalverteilung hat den Wert 0, da sie perfekt symmetrisch um den Mittelwert ist.

Die Formel für die Schiefe lautet:

$$\gamma = \sum_{i=1}^n p(x_i) \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^3 \quad (1.3)$$

Das normalisierte vierte Moment heisst Kurtosis und gibt Auskunft über die Wölbung der Verteilung. Die Wölbung einer Normalverteilung hat den Wert 3. Die Formel für die Kurtosis einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist definiert wie folgt:

$$\omega = \sum_{i=1}^n p(x_i) \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^4 \quad (1.4)$$

Leider hat man in der Realität nicht immer das vollständige Wissen über die exakte Beschaffenheit einer Verteilung und kann daher für die Berechnung der Momente nicht die exakten Wahrscheinlichkeiten einfließen lassen. Oft verfügt man lediglich über eine Stichprobe mit n Beobachtungen und möchte anhand dieser Rückschlüsse auf die zugrundeliegende Grundgesamtheit ziehen. Daher wird jede Realisierung in der Stichprobe gleichgewichtet. Die Formeln müssen wie folgt angepasst werden:

- Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.5)$$

- Varianz:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.6)$$

- Schiefe:

$$\bar{\gamma} = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3 \quad (1.7)$$

- Kurtosis:

$$\bar{\omega} = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4 \quad (1.8)$$

Beispiel Kovarianz und Korrelation der Renditen von zwei Aktien:

$$\begin{aligned}
 i &= \{1, 2, 3, 4\} \\
 p_i &= \{0.25, 0.5, 0.15, 0.1\} \\
 x_i &= -3\%, -2\%, 5\%, 10\% \\
 y_i &= -1\%, +2\%, -3\%, +2\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu(x) &= 0.25 \cdot (-0.03) + 0.5 \cdot (-0.02) + 0.15 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.1 = 0.00 \\
 \mu(y) &= 0.25 \cdot (-0.01) + 0.5 \cdot 0.02 + 0.15 \cdot (-0.03) + 0.1 \cdot 0.02 = 0.005
 \end{aligned}$$

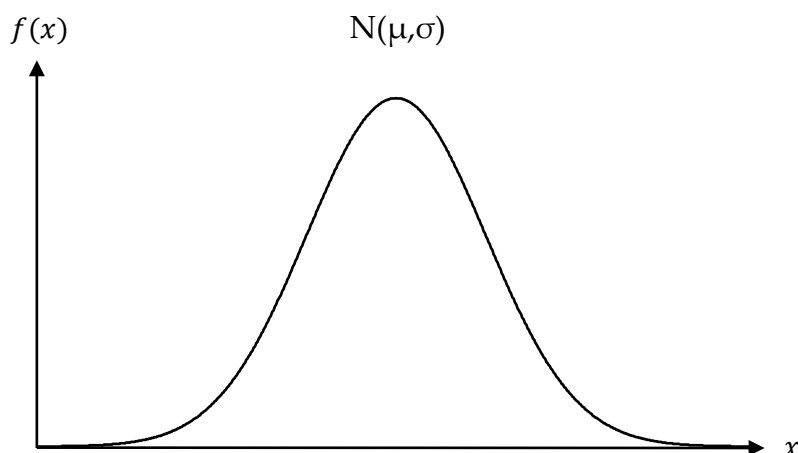
$$\begin{aligned}
 \sigma^2(x) &= 0.25 \cdot (-0.03 - 0)^2 + 0.5 \cdot (-0.02 - 0)^2 + 0.15 \cdot (0.05 - 0)^2 + 0.1 \cdot (0.1 - 0)^2 \\
 &= 0.0018 \\
 \sigma^2(y) &= 0.25 \cdot (-0.01 - 0.005)^2 + 0.5 \cdot (0.02 - 0.005)^2 + 0.15 \cdot (-0.03 - 0.005)^2 + 0.1 \\
 &\quad \cdot (0.02 - 0.005)^2 = 0.0004
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(x, y) &= \sum_i p_i \cdot (x_i - \mu(x)) \cdot (y_i - \mu(y)) \\
 \text{Cov}(x, y) &= 0.25 \cdot (-0.03 - 0)(-0.01 - 0.005) + 0.5 \cdot (-0.02 - 0)(0.02 - 0.005) + 0.15 \\
 &\quad \cdot (0.05 - 0)(-0.03 - 0.005) + 0.1 \cdot (0.10 - 0)(0.02 - 0.005) = -0.0002
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{x,y} &= \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)} \\
 \rho_{x,y} &= \frac{-0.0002}{\sqrt{0.0018}\sqrt{0.0004}} = -0.1826
 \end{aligned}$$

1.1.3 Normalverteilung

$$X = \mathbb{R}, p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Abbildung 1.2: Normalverteilung II

Quelle: eigene Darstellung.

Mit grösserem μ liegt die Verteilung weiter rechts. Mit grösserem σ ist sie flacher.

1.1.4 Dichtefunktion

Der grosse Vorteil von bekannten Verteilungen wie der Normal- oder der Lognormalverteilung ist, dass die dazugehörige Dichtefunktion bekannt ist. Dichtefunktionen sind über einen bestimmten Wertebereich definiert und ordnen jedem Wert eine Wahrscheinlichkeit zu. Je nach Verwendungszweck (Modellierung von Preisen oder Renditen) wird die Dichtefunktion anders geschrieben. Die wichtigsten Fälle lauten wie folgt:

Normalverteilte Renditen:

$$f(S_T) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(R-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.9)$$

Lognormalverteilte Renditen:

$$f(S_T) = \frac{1}{(1+R)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(1+R)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.10)$$

1.1.5 Test auf Normalverteilung – Jarque-Bera-Test

Da bei finanzmathematischen Modellen oft eine Normalverteilung angenommen wird, kann es entscheidend sein, zu prüfen, ob die vorliegenden Daten auch wirklich normalverteilt sind und somit die Aussagen des Modells halten. Es gibt verschiedene Tests, um dies mithilfe der Schiefe und der Kurtosis einer Verteilung zu überprüfen. Der Jarque-Bera-Test ist einer der bekanntesten und wird nachfolgend erläutert.

Beim Jarque-Bera-Test handelt es sich um einen Hypothesentest. Die Nullhypothese besagt, dass bei der zu testenden Verteilung eine Normalverteilung vorliegt. Die Alternativhypothese besagt, dass die Renditen nicht normalverteilt sind. Wie in 1.1.2 beschrieben, liegen für eine Normalverteilung die Werte der Schiefe bei 0 und der Kurtosis bei 3. Wir testen nun für den Jarque-Bera-Test die folgende Statistik:

$$J = \frac{n}{6} \left(\hat{\gamma}^2 + \frac{(\hat{\omega} - 3)^2}{4} \right) \quad (1.11)$$

wobei:

- $\hat{\gamma}$: geschätzte Schiefe
- $\hat{\omega}$: geschätzte Kurtosis

Ergibt der Jarque-Bera-Test $J = 0$, so kann nicht verworfen werden, dass es sich um eine Normalverteilung handelt, also darf man annehmen, dass es eine Normalverteilung ist. Allgemeiner formuliert besagt der Test, dass je näher die zu testende Verteilung der Normalverteilung folgt, desto niedriger ist der daraus resultierende Wert der Jarque-Bera-Statistik. Die Nullhypothese der Normalverteilung wird abgelehnt, sobald die Jarque-Bera-Statistik grösser als der kritische Wert, welcher vom gewünschten Signifikanzniveau abhängt, ist.

Da der Jarque-Bera-Test auf einer Chi-Quadrat-Verteilung² mit zwei Freiheitsgraden beruht, betragen die kritischen Werte für ein Signifikanzniveau von 5% bzw. 1% 5.99 bzw. 9.21.

Wenn man den Jarque-Bera Test auf die Daten der Abbildung 1.12 anwendet, sieht man, dass diese - auf einem Signifikanzniveau sowohl von 1% als auch 5% - nicht normalverteilt sind.

1.1.6 Unabhängigkeitskonzepte

Es gibt verschiedene Zeitpunkte $t = 1, 2, \dots, T$. Zu jedem Zeitpunkt gibt es eine Zufallsvariable x_t mit Ausprägungen $x_{t,1}, \dots, x_{t,n}$ und Wahrscheinlichkeiten $p_t = p_{t,1}, \dots, p_{t,n}$. Falls gilt $x_t = x_{t'}$ für alle Zeitpunkte t , dann ist x über die zeitunabhängig und identisch verteilt (Independent Identically Distributed, I.I.D.) Falls x unabhängig über die Zeit verteilt ist, also die Realisierung der Vorperioden keinen Einfluss auf spätere Realisierungen hat, nennt man x einen Random Walk. Insbesondere ist dann $\rho(x_t, x_{t'}) = 0$. Beispiel: x_1 Münzwurf, x_2 Rollen eines Würfels.

Für die Zwecke dieses Skriptes definieren wir zwei Zufallsvariablen als unabhängig, wenn $p(xy) = p(x) \cdot p(y)$ gilt, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass x einen konkreten Wert x_1 und y einen konkreten Wert y_1 hat, ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten, dass x den Wert x_1 und y den Wert y_1 hat. Beispiel man wirft eine Münze und rollt einen Würfel: $p(K4) = p(K) \cdot p(4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$

1.1.7 Zentraler Grenzwertsatz

Der Zentrale Grenzwertsatz besagt, dass die Summe von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen normalverteilt ist³. Unabhängigkeit impliziert Unkorreliertheit, denn $Cov(X, Y) = (E)(XY) - E(X)E(Y) = 0$. Ein Random Walk ist eine Folge von Zufallsvariablen, die unabhängig und identisch verteilt sind (Beispiel: wiederholter Münzwurf).

1.1.8 Lineare Algebra

Seien $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ Listen von reellen Zahlen. Falls $n = m$ definiert man das Skalarprodukt $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Es ist ein Mass für den Winkel α zwischen x und y .

Dabei gilt der grundsätzliche Zusammenhang:

$$x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\alpha) \quad (1.12)$$

$\|x\|$ und $\|y\|$ bezeichnen die Längen der beiden Vektoren. Lösen wir nun die obige Formel nach $\cos(\alpha)$ auf, so erhalten wir folgende Formel für den Winkel zwischen den Vektoren x und y .

$$\cos(\alpha) = \frac{x \cdot y}{\sqrt{x \cdot x} \sqrt{y \cdot y}} \quad (1.13)$$

² Die Chi-Quadrat-Verteilung stellt als Verteilung die Summe der Quadrate der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit n Freiheitsgraden dar.

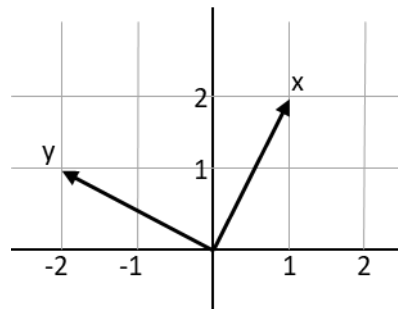
³ Der Abstand zwischen dem Mittelwert von n Ziehungen der Zufallsvariablen und dem Erwartungswert, μ , der Zufallsvariablen konvergiert mit der Rate \sqrt{n} gegen die Normalverteilung $N(0, \mu)$.

Beispiel:

$$x = (1,2), y = (-2,1)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = 0$$

Also steht x zu y senkrecht. In der Praxis würde der besagte Winkel genau der Korrelation zwischen dem Aktientitel x und dem Aktientitel y im zweidimensionalen Raum entsprechen. Die beiden Aktientitel wären somit unkorreliert.



Eine Matrix ist eine Doppelliste von reellen Zahlen:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Das Produkt einer Matrix mit einer Konstanten:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} A_{11}x & \cdots & A_{1n}x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}x & \cdots & A_{mn}x \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass die Dimensionen passen müssen, also A genauso viele Spalte hat, wie x lang ist. Die transponierte Matrix A^t geht aus A durch Vertauschen von Zeilen und Spalten hervor

$$A^t = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Ein Vektor ist normalerweise ein Spaltenvektor. Das heisst $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $x^t = (x_1, \dots, x_n)$.

Somit würde auch $x^t A^t$ multiplizierbar sein.

1.1.9 Optimierung

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ stetig differenzierbar (Beispiel $y = x^2$ geht $y = |x|$ aber nicht). Dann ist der Wert x^* ein Maximum, wenn $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) \leq 0$, Bsp. $y = -x^2, x^* = 0$ und ein Minimum, wenn $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) \geq 0$, Bsp. $y = x^2, x^* = 0$.

Bemerkung: Das Maximum bzw. Minimum ist lokal, falls die Bedingung an die zweite Ableitung nur an der Stelle gilt. Es ist global, wenn diese überall gilt.

1.1.10 Verallgemeinerung auf n Argumente

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x_1, \dots, x_n)$ stetig differenzierbar, dann ist $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ ein Maximum, wenn $\partial_{x_i} f(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0, i = 1, \dots, n$ (Partielle Ableitung) und

$$H(x^*) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \partial_{x_1} f(x^*) & \cdots & \partial_{x_1} \partial_{x_n} f(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_m} \partial_{x_1} f(x^*) & \cdots & \partial_{x_m} \partial_{x_n} f(x^*) \end{bmatrix}$$

negativ semidefinit ist, d.h. $x^t H(x^*) x \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere darf dann die Diagonale von $H(x^*)$ nicht positiv sein, da der Prüfvektor x ja auch ein Einheitsvektor (Vektor mit nur einer 1 und sonst 0) sein kann.

Beispiel:

$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ ist stetig differenzierbar und hat an der Stelle $x = (0, 0)$ ein Maximum.

$$\partial_{x_1} f(x_1, x_2) = 2x_1, \text{ und } \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = 2x_2$$

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Offensichtlich ist $\partial_{x_i} f(0, 0) = 0, i = 1, 2$ und

$$(x_1, x_2) \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = -2x_1^2 - 2x_2^2 < 0$$

1.1.11 Implizites Funktionstheorem

Steigung einer implizit gegebenen Funktion:

Sei $f(x_1, x_2)$ stetig differenzierbar. Durch die Gleichung $f(x_1, x_2) = c$ wird implizit eine Funktion $x_2 = \phi(x_1)$ definiert. Was ist die Steigung von ϕ ? Man berechnet das totale Differential $\partial_{x_1} f(x_1, x_2) dx_1 + \partial_{x_2} f(x_1, x_2) dx_2 = 0$, wobei dx_i die Variation von Funktion f in Richtung von x_i ist, $i = 1, 2$. Dann ist die gesamte Steigung $\phi'(x_1) = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial_{x_1} f(x_1, x_2)}{\partial_{x_2} f(x_1, x_2)}$

Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2, \text{ also } \phi(x_1) = x_1^2$$

$$2x_1 dx_1 - dx_2 = 0$$

Ergibt:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = 2x_1 = \phi'(x_1)$$

1.2 Effizienzmarkthypothese

Grundlage vieler Modelle und Theorien in der Finance bildet die Annahme effizienter Märkte. Als Basis für die späteren Kapitel, in welchen das Mean-Variance-Kriterium oder das Capital Asset Pricing Model [CAPM] besprochen werden, widmen wir uns in diesem ersten Kapitel der Effizienzmarkthypothese [EMH]. Die grundsätzliche Prämisse effizienter Märkte besagt, dass Aktienpreise zu jeder Zeit alle verfügbaren Informationen beinhalten und sich die Preise bei Auftreten von neuen Informationen sofort entsprechend anpassen werden. Wenn die Effizienzmarkt Hypothese gilt, so sind die Renditen von Wertanlagen über die Zeit unabhängig und nicht korreliert (d.h. sie können nicht anhand von Kursen, öffentlichen oder privaten Informationen vorhergesagt werden und fluktuieren zufällig, z.B. wie Münzwürfe).

Eugene Fama veröffentlichte im Jahr 1970 sein Paper mit dem Titel «Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work» im Journal of Finance. Seine Arbeit beschäftigte sich mit der Frage, ob Preise zu jedem Zeitpunkt alle verfügbaren Informationen komplett abbilden würden und der Markt damit als effizient beschrieben werden kann. Ein effizienter Markt ist ein Markt, welcher neue Informationen sofort in Preisbewegungen abbildet und somit keinen Spielraum für die Ausnutzung irrationaler Falschbewertungen einer Aktie bietet.

Abbildung 1.3: Renditen im Effizienten Markt⁴

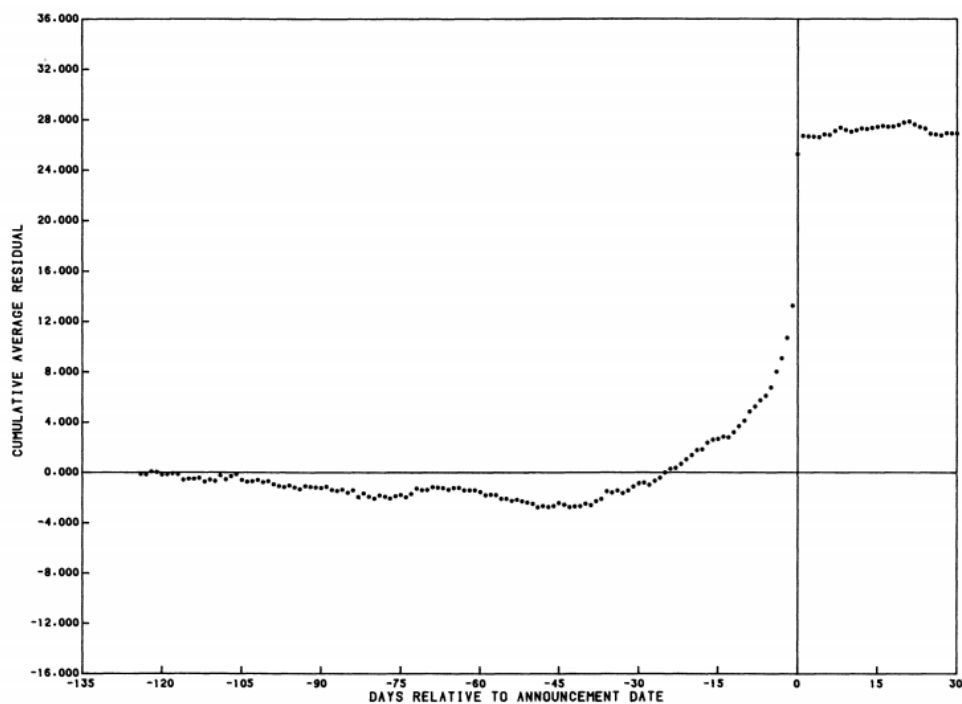


Figure 1. Cumulative Average Residuals-Market Model-Entire Sample

Quelle: Keown / Pinkerton (1981).

Dieses Verhalten erkennt man gut in Abbildung 1.3. Die Grafik veranschaulicht, wie am Tag 0 durch neue Informationen der Preis einer Aktie auf die neue faire Bewertung springt⁵. Dieser Sprung impliziert eine Reihe von Verhalten: In einem effizienten Markt können Preise nur aufgrund *neuer*, unvorhersehbarer Informationen steigen oder sinken. Wären diese

⁴ Die cumulative average residuals sind definiert als die Summe der vorherigen täglichen durchschnittlichen Residuen. Die Residuen stellen die tägliche Abweichung der Rendite gegenüber der des CAPM Modell dar, bei $t = -185, \dots, 30$

⁵ Mögliche Erklärungen für den Preisanstieg vor Tag 0 sind Gerüchte, Antizipation oder Insiderwissen.

„neuen“ Informationen bekannt, oder vorhersehbar, wären sie bereits zum Zeitpunkt des Bekanntwerdens eingepreist worden. Als Folge daraus entwickelte sich die sogenannte Random-Walk-Theorie, welche besagt, dass sich Preise einer Aktie unvorhergesehen bewegen.

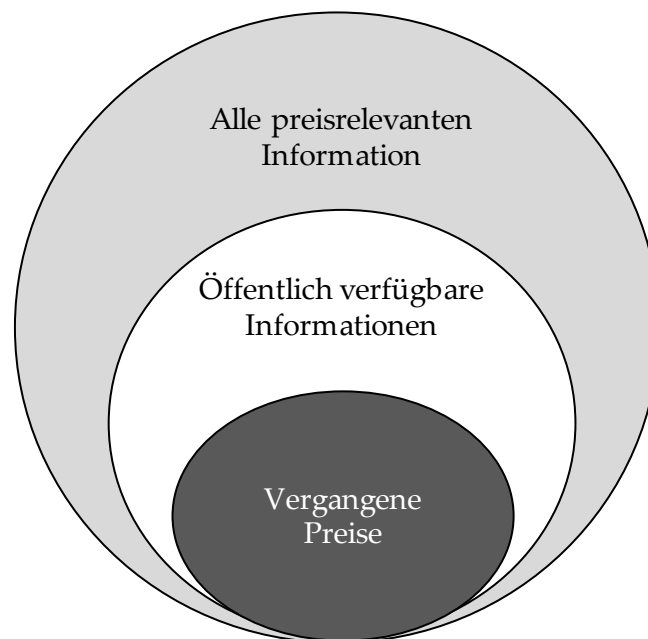
Fama unterscheidet zwischen zwei verschiedenen Informationsarten: privaten Informationen (wie Insiderwissen) und öffentlichen Informationen aus Fundamentaldaten und Kursdaten. Diese gehen mit drei verschiedenen Stufen der EMH einher: der starken, der mittelstarken und der schwachen Form der Markteffizienz:

- **Starke Form der Markteffizienz:** Laut der starken Form der EMH sind alle Informationen, d.h. sowohl öffentliche (z.B. Kurs- und Fundamentaldaten), als auch private Informationen (z.B. Insiderwissen) bereits in den Preisen enthalten und korrekt eingepreist. Die Analyse vieler Studien zeigt allerdings, dass die starke Markteffizienz in der Realität nicht gegeben ist und auch Fama (1970, S. 414) selbst bezeichnet sie als: «(...) an extreme model to be an exact description of the world, and is probably best viewed as a benchmark (...)». Zur Veranschaulichung kann man sich das Verbot von Insiderhandel vor Augen führen. Wäre die starke Form der EMH wirklich gegeben, so wäre es nicht möglich sich mit Insiderinformationen einen unfairen Vorteil zu verschaffen und signifikante Überrenditen zu erzielen, da die Insiderinformationen bereits eingepreist wären. Der Insiderhandel müsste in diesem Fall nicht verboten werden. Da Insiderhandel verboten und strafbar ist, lässt sich daraus schliessen, dass es möglich ist, sich daraus einen unfairen Vorteil gegenüber anderen Marktteilnehmern zu beschaffen, was impliziert, dass die starke Form der EMH in der Realität nicht hält.
- **Mittelstarke Form der Markteffizienz:** Die mittelstarke Form besagt, dass alle öffentlichen Informationen sowie alle Erwartungen über die künftige Entwicklung für die Preisbildung des Aktienkurses berücksichtigt werden. Neue Informationen werden sehr schnell verarbeitet (wie in Abbildung 1.3 ersichtlich), weshalb mit den verfügbaren Informationen keine Überrendite erwirtschaftet werden kann. Falls die Märkte mittelstark effizient sind, kann die Fundamentalanalyse von Unternehmen keinen Mehrwert schaffen. Auch können keine Vorteile durch das Studieren von Zeitungen und anderen öffentlich zugänglichen Informationsquellen erzielt werden. Die Analyse vieler Studien zeigt, dass die mittelstarke Markteffizienz nur teilweise gegeben ist. Auf der einen Seite gibt es Studien, wie von Fama (1970) beschrieben, die belegen, dass die Märkte in der mittleren Form effizient sind und andererseits gibt es Investoren wie Warren Buffett, welcher durch seine fundamentaldaten-basierte Value-Strategie seit Jahrzehnten systematisch Überrenditen erzielt (mehr zum Value-Ansatz und Warren Buffett im Kapitel 9). Diese systematischen Überrenditen widerlegen die EMH der mittelstarken Form.
- **Schwache Form der Markteffizienz:** Die schwache Form der Markteffizienz bezieht sich ausschliesslich auf die historischen und aktuellen Kursinformationen eines Marktes. Sie geht davon aus, dass sich in den aktuellen Preisen alle relevanten Informationen der Vergangenheit (vergangene Marktdaten wie Preise oder Volumina) widerspiegeln. Dies bedeutet, dass durch die Analyse vergangener Preise keine zusätzlichen Informationen über die Zukunft gewonnen werden können. Aktienkurse sollten bei neuen Informationen sehr schnell ändern und dann auf dem korrekten Niveau bis zu neuen Änderungen konstant bleiben. Änderungen von Aktienkursen sollten zufällig sein (Random-Walk-Theorie), da preisrelevante Informationen zufällig auftreten. Daher gilt, dass - falls die Märkte schwach effizient sind - die technische

Analyse ⁶ von Aktienkursen keinen Mehrwert schaffen kann. Mittels Fundamentalanalyse oder Insiderwissen hingegen schon (siehe Abbildung 1.4). Die meisten Studien zeigen, dass – unter Berücksichtigung von Transaktionskosten – die schwache Form der Markteffizienz gegeben ist.

Abbildung 1.4 stellt die Idee der EMH nochmals grafisch dar. Wie bereits beschrieben, besagt die Hypothese, dass die Wertpapierpreise zu jeder Zeit alle verfügbaren Informationen beinhalten. Die unterschiedliche Grösse der Kreise in Abbildung 1.4 reflektiert dabei die Menge an Informationen, welche in den Preisen reflektiert werden. Die nächsthöhere Form der Markteffizienz setzt stets die tiefere Form voraus und aus Arbitrageüberlegungen sollten in den Preisen alle relevanten Informationen reflektiert werden.

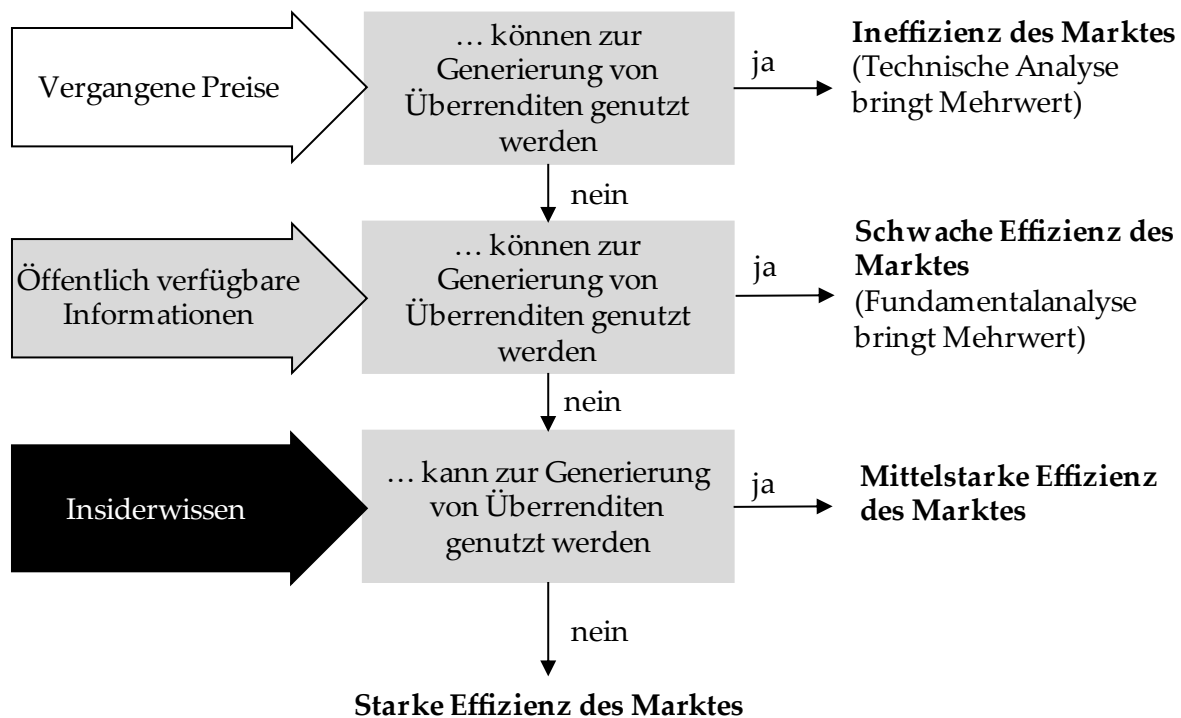
Abbildung 1.4: Grafische Darstellung der Effizienzmarkthypothese



Quelle: Eigene Darstellung.

Abbildung 1.5 zeigt die EMH schematisch auf. Nur sofern die vorherige Form der Markteffizienz gegeben ist, lässt sich die nächsthöhere untersuchen. Ausserdem wird in der Abbildung ersichtlich mit welchen Informationen möglicherweise Überrenditen erzielt werden können. Diese lassen dann auf verschiedene Anlagestrategien schliessen:

⁶ Die technische Analyse ist das Studium von Marktbewegungen zur Prognose zukünftiger Kursbewegungen, wobei Kurs, Volumen und Open Interest als Marktbewegungen betrachtet werden.

Abbildung 1.5: Klassifizierung Markteffizienz

Quelle: Eigene Darstellung.

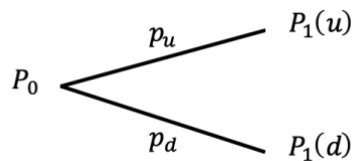
1.3 Herleitung von Renditeverteilungen

Der nächste Abschnitt widmet sich der Herleitung von Renditeverteilungen. Ausgangslage hierfür bildet ein einfaches Binomialmodell, welches den Kursverlauf einer Aktie über eine Periode simuliert. Basierend auf der eingangs erwähnten Random-Walk-Theorie und dem zentralen Grenzwertsatz kann gezeigt werden, dass die Renditen von Aktien, unter gewissen Annahmen, einer Normalverteilung folgen.

1.3.1 Das Binomialmodell

Als Startpunkt betrachten wir den Kursverlauf eines Assets in einer Periode. Dieser kann, sehr vereinfacht, mit einem Binomialmodell dargestellt werden. Wir nehmen hierfür an, dass es zwei mögliche Zustände ($s \in \{u, d\}$) nach Ablauf der Periode gibt, die mit den Wahrscheinlichkeiten $p_u \in [0,1]$ und $p_d \in [0,1]$ eintreten können. p_d entspricht dabei $1 - p_u$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von p_u wird der Preis des Assets ansteigen (up) und bei $P_1(u)$ liegen und mit einer Wahrscheinlichkeit von p_d wird er fallen (down) und bei $P_1(d)$ liegen.

Als typisches Beispiel eines solchen Binomialmodells kann ein Münzwurf angesehen werden: Es gibt die Ereignisse «Kopf» und «Zahl», die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% eintreten können. Auch kann mithilfe eines Binomialmodells eine (vereinfachte) Kursentwicklung einer Aktie modelliert werden.

Abbildung 1.6: Binomialmodell über eine Periode

Quelle: Eigene Darstellung.

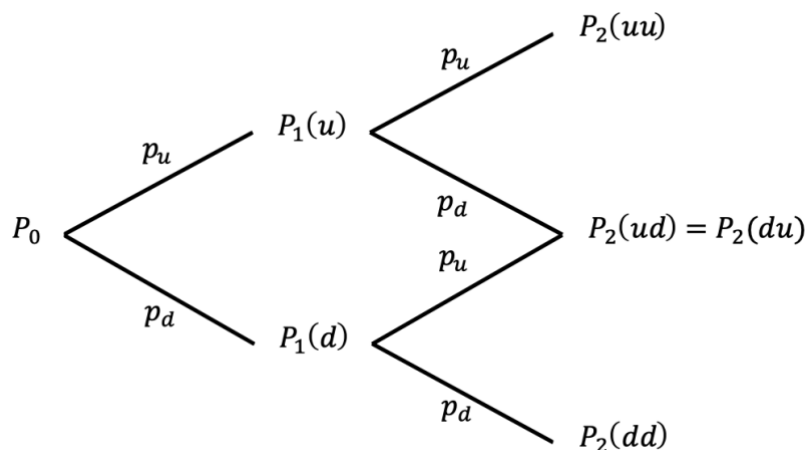
Die Bruttorendite, die unser Asset nun erzielt, hängt von P_1 und P_0 ab und ist wie folgt definiert:

$$R_1(s) = \frac{P_1(s)}{P_0} \quad (1.14)$$

Die Nettorendite errechnet sich dabei wie folgt:

$$r_1(s) = \frac{P_1(s) - P_0}{P_0} = R_1(s) - 1 \quad (1.15)$$

Dieses einfache Modell kann nun auf mehrere Perioden erweitert werden. Die grundlegende Idee ist, dass man den identischen Vorgang mehrmals wiederholt. Im Kontext des Münzwurfs bedeutet dies, dass die Münze mehrfach geworfen wird. Im Kontext der Modellierung von Aktienpreisen erhalten wir durch die mehrmalige Durchführung des Vorgangs eine Preisentwicklung wie in Abbildung 1.7 dargestellt.

Abbildung 1.7: Binomialmodell über zwei Perioden

Quelle: Eigene Darstellung.

Während im einfachen Ein-Perioden-Modell die Wahrscheinlichkeiten für jeden Zustand klar definiert ist (nämlich gerade p_u und p_d), müssen die Wahrscheinlichkeiten im Zwei-Perioden-Modell berechnet werden. Dazu müssen zwei Aspekte berücksichtigt werden:

- Wie wahrscheinlich ist es über einen einzelnen Pfad in den entsprechenden Endzustand zu kommen? Zur Bestimmung hierfür werden die Eintrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Perioden miteinander multipliziert.

- Wie viele Pfade führen zu dem Zielereignis? In kleinen Modellen kann dies ausgezählt werden. Bei grösseren Modellen wird hierfür der Binomialkoeffizient verwendet, welcher in Abschnitt 1.3.2 genauer beschrieben wird.

Für das Verständnis ist es wiederum hilfreich an einen Münzwurf zu denken: Die Wahrscheinlichkeit zweimal Kopf zu werfen, ist die Wahrscheinlichkeit einmal Kopf zu werfen (50%) multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit ein zweites Mal Kopf zu werfen (ebenfalls 50%). Demnach ist die Wahrscheinlichkeit zwei Mal Kopf zu werfen gleich 25%. Da es nur einen Pfad mit dem Ergebnis «Zwei Mal Kopf» gibt, nämlich genau dann, wenn in beiden Durchführungen ein Kopf geworfen wird. Analog dazu, wird das Ergebnis «Zwei Mal Zahl» mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% erzielt.

Was ist mit dem gemischten Ergebnis, dass man einmal Kopf und einmal Zahl wirft?

Zum Erreichen dieses Ergebnisses gibt es zwei mögliche Pfade: Entweder wirft man erst «Kopf» und dann «Zahl» oder erst «Zahl» und dann «Kopf». Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, dass man nach dem zweimaligen Werfen einer Münze das Endergebnis «Einmal Kopf, einmal Zahl» erhalten hat:

$$50\% \cdot 50\% + 50\% \cdot 50\% = 50\%$$

Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit erst Kopf und dann Zahl zu werfen plus die Wahrscheinlichkeit erst Zahl und dann Kopf zu werfen.

Im Kontext unseres Zwei-Perioden-Modells führt dies zu den folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Tabelle 1: Eintrittswahrscheinlichkeiten zwei-Perioden-Binomialmodell

Zustand	Wahrscheinlichkeit
uu	p_u^2
$ud = du$	$2p_u p_d$
dd	p_d^2

1.3.2 Binomialkoeffizient

Das in dem vorhergehenden Abschnitt beschriebene Binomialmodell über eine resp. zwei Perioden ist gut zur Veranschaulichung der Modellierung. Um mithilfe unseres Modells die Entwicklung von Aktienpreisen realistischer abbilden zu können, betrachten wir im Folgenden n Perioden. Wie bereits beschrieben, ist die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Zustands in grösseren Modellen schwieriger. Hierfür wird der Binomialkoeffizient verwendet, welcher wie folgt definiert ist:

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j! \cdot (n-j)!} \quad (1.16)$$

wobei:

- n: Gesamtzahl der betrachteten Perioden
- j: Anzahl, wie oft ein bestimmter Zustand eingetroffen ist

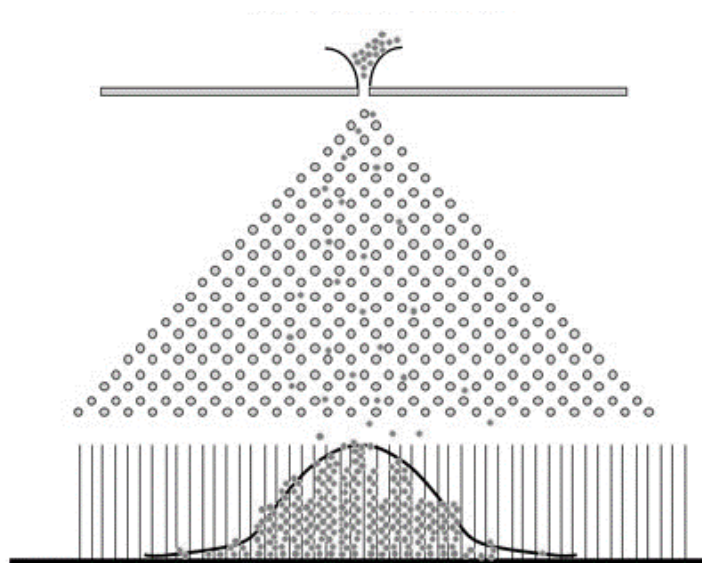
$$\binom{3}{1} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot (2 \cdot 1)} = 3 \quad (1.19)$$

Es gibt also drei verschiedene Pfade, über welche dieser Punkt erreichbar ist. Analog kann die Anzahl möglicher Pfade zu jedem beliebigen Wegpunkt innerhalb des Pascal'schen Dreiecks mithilfe des richtigen Binomialkoeffizienten berechnet werden.

1.3.4 Exkurs: Galton Brett – Die Normalverteilung

Das Galton Brett ist eine mechanische Darstellung, mit deren Hilfe die Form der Normalverteilung approximiert werden kann. Dazu nahm Francis Galton ein Brett, in welches er zahlreiche Nägel mit gleichmässigem Abstand schlug. Danach liess er Kugeln vom Startpunkt aus das Brett herunterrollen und sammelte diese unten in zahlreichen Behältern.

Abbildung 1.9: Galton Brett



Quelle: Digikey (2018).

Die meisten Kugeln befanden sich in der Mitte und immer weniger sammelten sich an den äusseren Enden. Die Dualität zum Pascal'schen Dreieck ist offensichtlich: Es gibt mehr Wege, die in die Mitte führen. Darum fanden auch mehr Kugeln den Weg dorthin. In einem idealen Experiment mit $n \rightarrow \infty$ verteilen sich die Kugeln auf die Behälter gemäss der Normalverteilung $N \sim (\mu, \sigma)$.

1.4 Die Verteilung von Renditen

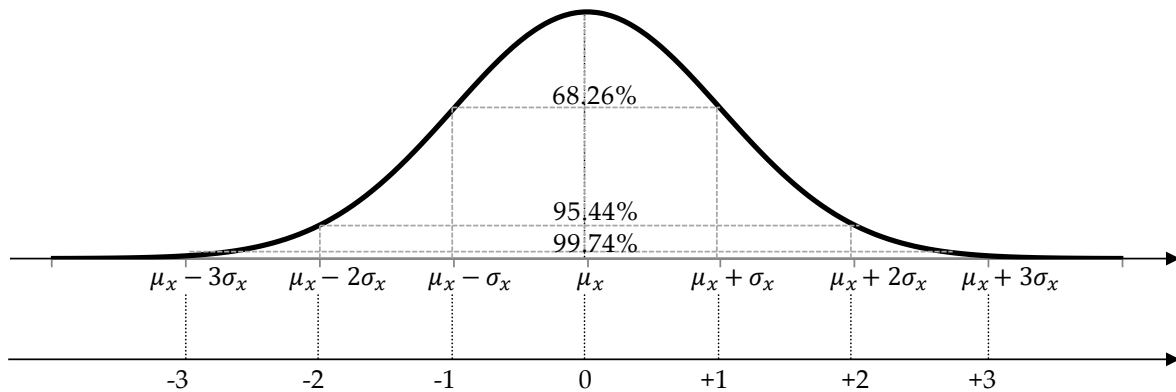
1.4.1 Normalverteilung

Wie oben gezeigt, folgt aus der Effizienzmarkthypothese, dass Renditen von Wertpapieren normalverteilt sind. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung besteht dann aus einem Mittelwert μ (durchschnittlich erzielte Rendite einer Anlage) und einer symmetrischen Streuung um diesen Mittelwert, der Standardabweichung σ (die Wurzel der Varianz). Durch das Herbeiziehen der Standardabweichung können sogenannte Wahrscheinlichkeitsbereiche, auch Konfidenzintervalle genannt, angegeben werden.

Wie der nachfolgenden Abbildung entnommen werden kann, liegen 68.26% der Beobachtungen im Bereich zwischen +/- einer Standardabweichung um den Mittelwert. Die

tatsächlichen Renditen einer Anlage mit einem Mittelwert von 0 und einer Standardabweichung von 2.3 lägen also mit einer Konfidenz von 68.26% im Intervall von -2.3% bis +2.3%. Mit steigender Spannweite des Intervalls (grösseres Konfidenzintervall (σ , 2σ und 3σ)) steigt somit die Wahrscheinlichkeit (68.26%, 95.44% und 99.74%), dass der tatsächliche Wert in diesem Intervall enthalten ist.

Abbildung 1.10: Normalverteilung



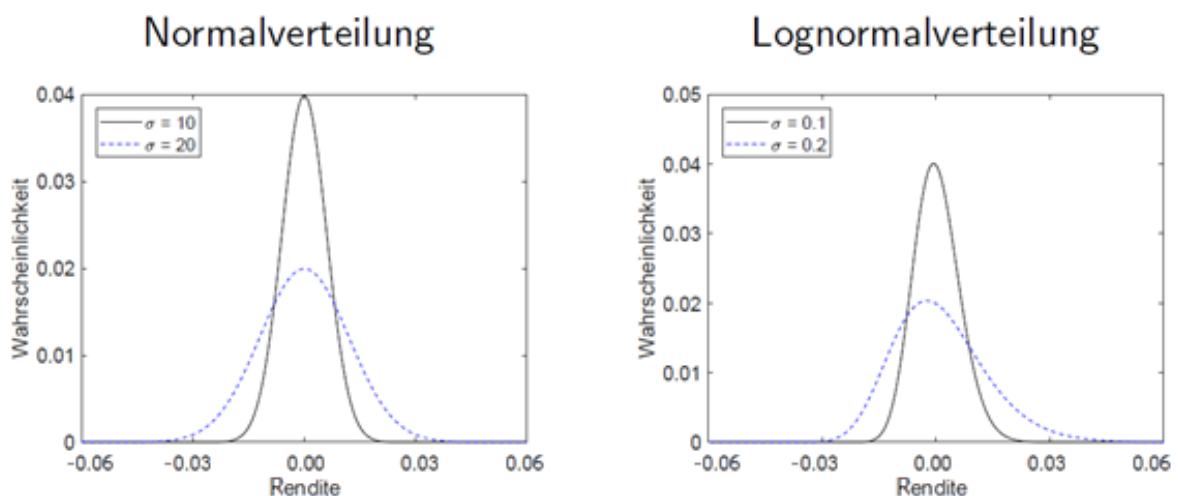
Quelle: Eigene Darstellung.

In der Finance-Theorie wird häufig davon ausgegangen, dass Aktienrenditen normalverteilt sind. Der grosse Vorteil der Annahme der Normalverteilung ist die Tatsache, dass die statistischen Eigenschaften der Verteilung bekannt sind, wodurch einfacher Berechnungen vorgenommen werden und Anlagen beurteilt werden können. Jedoch entspricht dies oftmals nicht der Realität und Renditen sind nicht normalverteilt. Auf mögliche Erklärungen für Abweichungen von der Normalverteilung wird in 1.5 vertiefter eingegangen.

1.4.2 Lognormalverteilung

Eine weitere Möglichkeit, die Verteilung von Renditen zu beschreiben, bietet die Lognormalverteilung. Eine Zufallsvariable X ist logarithmisch normalverteilt, wenn die Zufallsvariable $\ln(x)$ normalverteilt ist.

Abbildung 1.11: Normalverteilung und Lognormalverteilung



Quelle: Eigene Darstellung.

Anhand von Abbildung 1.11 wird ersichtlich, dass die Lognormalverteilung, im Gegensatz zur Normalverteilung, nicht symmetrisch, sondern rechtsschief verteilt ist. Ausserdem ist die Verteilung lediglich für Werte im positiven Bereich definiert. Da der Preis eines Assets nicht unter null fallen kann, ist die maximal mögliche negative Rendite begrenzt auf -100%. Betrachten wir anstelle der Rendite r die Werte des Wachstumsfaktors $(1 + r)$, so können diese definitionsgemäss nicht negativ sein. Daher wird in der Regel die Verteilung von $(1 + r)$ und nicht von r betrachtet und angenommen, dass diese einer Lognormalverteilung folgt. Ist die Normalverteilung oder die log-Normalverteilung ein besseres Modell für die Beobachtung von Wertpapierrenditen? Diese Überlegung können wir nun wie folgt auf Aktienkurse anwenden:

Investieren ist ein multiplikativer Prozess. Die Gesamrendite R^T entspricht der Multiplikation der erzielten Wachstumsfaktoren in den einzelnen Perioden $(R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_t)$. Durch logarithmieren wird die erzielte Gesamrendite zu einem additiven Prozess:

$$\ln(R^T) = \sum_{t=1}^T \ln(R_t) \quad (1.20)$$

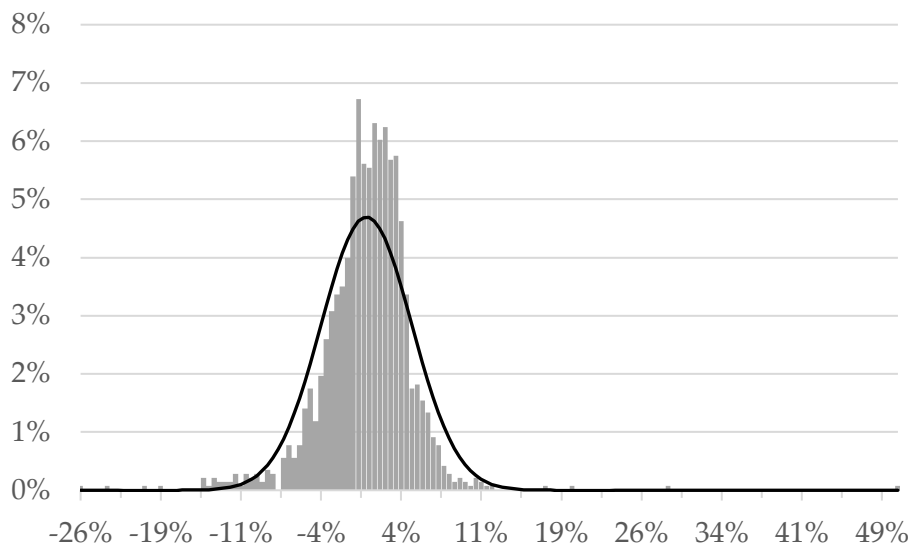
Falls nun $\ln(R_t)$ unabhängig von $\ln(R_{t+1})$ ist, so folgt gemäss des zentralen Grenzwertsatzes die logarithmierte Gesamrendite $\ln(R^T)$ einer Normalverteilung. Zudem sind Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ möglich, was mit der Annahme einer Normalverteilung konsistent ist. Also spricht einiges für die log-Normalverteilung. Was hingegen gegen die log-Normalverteilung spricht, sehen wir im Kapitel 2 Portfoliotheorie und Portfoliooptimierung.

1.5 Erklärung der Abweichung von der Normalverteilung

Eine mögliche Erklärung der beobachteten Abweichung von Renditeverteilungen zum Ideal der Normalverteilung sind Aufschaukelungsprozesse, wie sie zum Beispiel in spekulativen Blasen vorkommen. Die Vorstellung der Vertreter dieser Hypothese (vor allem Shiller (2000)) ist, dass Kursbewegungen nicht nur dadurch zu Stande kommen, dass alle Marktteilnehmer exogene Informationen antizipieren, sondern, dass Kursbewegungen auch endogen durch die Interaktion der Marktteilnehmer begründet sind. Es gibt viele Marktteilnehmer, welche keine Fundamentalbewertung von Wertpapieren vornehmen, sondern investieren, wenn der Preis steigt, wodurch der Preis weiter steigt und noch mehr kaufen etc. Damit sind Renditen nicht mehr unabhängig voneinander.

Dieses Marktverhalten ist natürlich nicht nachhaltig, sodass früher oder später die Kurse einbrechen. Eine Konsequenz dieser Sichtweise ist, dass Renditeverteilungen auf längere Sicht stärker von der Normalverteilung abweichen, da die Phasen, während welcher die Preise steigen (aufschaukeln) in der Regel länger als die Phasen sind, während welchen die «überhöhten» Preise wieder korrigiert werden (Platzen der Blase). Es sollten somit empirisch mehr positive als negative Beobachtungen sichtbar sein, jedoch die negativen Beobachtungen stärker ausfallen. Das beschriebene Phänomen wird in Abbildung 1.12 ersichtlich:

Abbildung 1.12: Log-Renditen des S&P 500 (monatliche Daten 1871-2018)



Quelle: Bloomberg.

Die Liste der Spekulationsblasen, beginnend mit der Tulpenmanie der Niederlande im 17. Jahrhundert, ist sehr lang. Es folgten die Spekulationen im Zuge der Ausbeutung von Kolonien (Südseeblase, Mississippi Blase, ...), dann kamen Technologieblasen (Eisenbahn, Fließband, Internet, Blockchain) und immer wieder gab es Spekulationsblasen auf dem Immobilienmarkt (Schweiz und Japan 1980-1990, USA 2000-2006, ...). Letztere sind besonders gefährlich, da Immobilien einen grossen Teil des volkswirtschaftlichen Vermögens ausmachen und stark mit Banken Krisen verbunden sind. Folgende Abbildung 1.13 zeigt den Kursverlauf des NASDAQ-Indexes während der Internetblase 1997-2001.

Abbildung 1.13: Kursverlauf NASDAQ während der Internetblase



Quelle: NASDAQ.

Kindleberger und Aliber (2005) unterscheiden die folgenden Phasen einer Spekulationsblase:

1. *Verlagerung* (Displacement)

Blasen haben oftmals einen realwirtschaftlichen Hintergrund, welcher durch einen «exogenen» Schock ausgelöst wird. Als Beispiel können Erfindungen wie das Internet oder Deregulierungen genannt werden.

2. *Boom* (Take-off)

Aufgrund der allgemeinen Überzeugung beginnen Investoren in die Anlage zu investieren – die Preise steigen. Dadurch entsteht ein positiver Rückkopplungseffekt (Positive Feedback Loop), welcher den Preisanstieg weiter beschleunigt.

3. *Euphorie* (Exuberance)

«This time is different». Die Anleger beginnen nun zu glauben, der Boom wäre ewig und die Preise könnten nur weitersteigen. Dies ist eine gefährliche Phase, da bewährte Bewertungsgrundsätze aufgegeben werden und neue Methoden geschaffen werden, um die hohen Preise zu rechtfertigen. Investitionen erfolgen nun oftmals nur mit der Absicht, die Anlage zu einem späteren Zeitpunkt gewinnbringend verkaufen zu können.

4. *Kritische Phase* (Critical Stage)

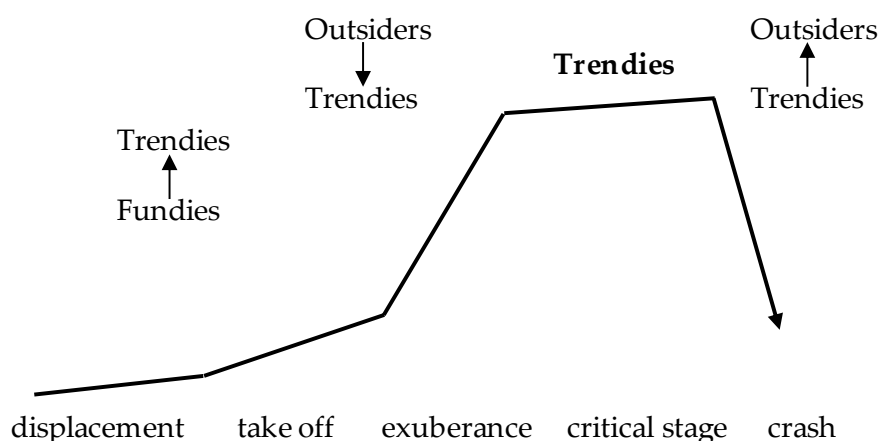
Durch ein Einzelereignis (z.B. Konkurs eines Marktteilnehmers) können nun die Preise unter Druck geraten. Stark verschuldete Marktteilnehmer müssen ihre Positionen abbauen, wodurch die Preise noch stärker unter Druck geraten.

5. *Crash* (Crash)

Die Investoren verlieren die Überzeugung in die Anlage und wollen aussteigen. Die Preise fallen nun auf ein zu tiefes Niveau.

Abbildung 1.14 zeigt die Populationsdynamik entlang von Spekulationsblasen gemäss Lux (1995).

Abbildung 1.14: Populationsdynamik entlang Spekulationsblasen



Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Lux (1995).

Eine zentrale Frage ist, woran man erkennt, ob man sich aktuell in einer Spekulationsblase befindet. Als jüngstes Beispiel für eine Spekulationsblase können Blockchains wie Bitcoin genannt werden. Aus heutiger Sicht scheint klar, dass die Preise vor einem Jahr primär durch Spekulation getrieben waren und überbewertet waren. Doch wie wurde dies im

November/Dezember 2017 eingeschätzt? Gemäss Prof. Didier Sornette (2003) von der ETH dient superexponentielles Wachstum der Preise als Indikator von Blasen. Das heisst Phasen vor einem Crash werden in der Regel indiziert von übermässigem Wachstum davor. In Abbildung 1.15 sehen wir die Entwicklung der log-Renditen des S&P 500 von 1900 bis 2017. Superexponentielles Wachstum erkennt man daran, dass die logarithmierten Kurse mehr als linear steigen. Dies gab es in den Roaring Twenties, zur Jahrtausendwende und wieder 2003-2006. Jedes Mal folgte ein Crash! Eine aktuelle Arbeit zur Empirie von spekulativen Blasen ist Greenwood, Shleifer, You (2017) «Bubbles for Fama». Diese Autoren zeigen, dass nach einer Verdopplung von Kursen wahrscheinlicher ein Crash als normale Kurssteigerungen kommen.

Abbildung 1.15: Kursverlauf S&P 500 von 1900-2018



Quelle: Bloomberg.

2 Portfoliotheorie und Portfoliooptimierung

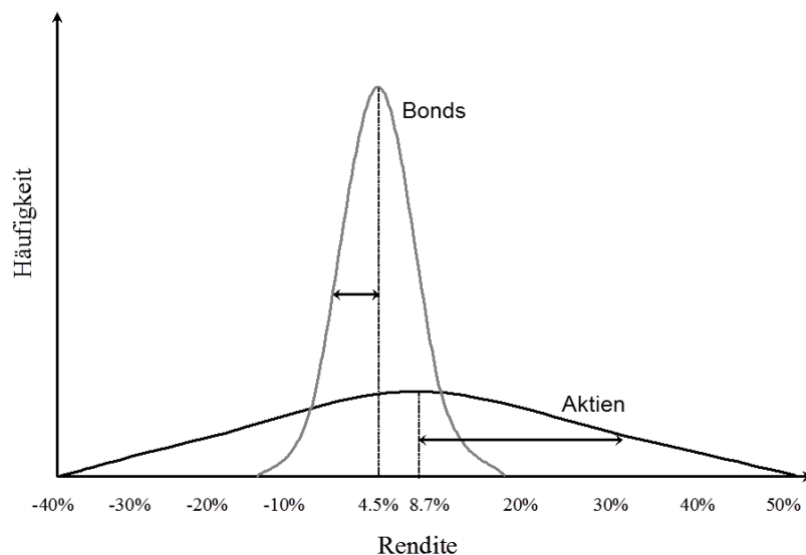
2.1 Repetition: Risiko und Rendite im Portfolio

Die folgenden Ausführungen stammen aus dem Skript der Vorlesung Banking and Finance II. Die Repetition deckt den Stoff aus der Vorlesung Banking and Finance II nicht vollumfänglich ab, da nur selektierte Themen nochmals zur Repetition in diesem Skript erläutert werden, um darauf aufbauen zu können.

2.1.1 Zusammenhang zwischen Risiko und Rendite

Anlagen haben unterschiedliche Risiko- und Renditenprofile. Abbildung 2.1 zeigt die historische Verteilung von erzielten Renditen für Obligationenanleihen (Bonds) und Aktien am schweizerischen Kapitalmarkt.

Abbildung 2.1: Historische Renditeverteilung am CH-Kapitalmarkt (1925 – 1997)



Quelle: Gehrig / Zimmermann (2000).

Neben den verschiedenen Wölbungen (Kurtosis) zeigt die Abbildung auch das unterschiedliche Risiko der Anlageklassen auf. Betrachtet man die Häufigkeitsverteilung der Aktienrenditen, wird ersichtlich, dass die Renditen von -40% bis über +50% reichen. Die Renditeverteilung der Aktie ist flacher. Dies bedeutet, dass die Häufigkeit einer extremen Rendite grösser ist, was die Anlage in Aktien risikoreicher als diejenige in Bonds macht, wo die Spannweite der Renditen einerseits viel begrenzter und die Häufigkeit einer mittleren Rendite viel höher ist. Somit ist die Anlage in Bonds im Schnitt berechenbarer und damit weniger risikoreich.

Um zuletzt ein Gefühl für die tatsächlichen Grössenordnungen von Renditen und Risiken von verschiedenen Anlageklassen zu entwickeln, zeigt Tabelle 2 beispielhaft jährliche Renditen und Standardabweichungen von verschiedenen Anlageklassen in den USA:

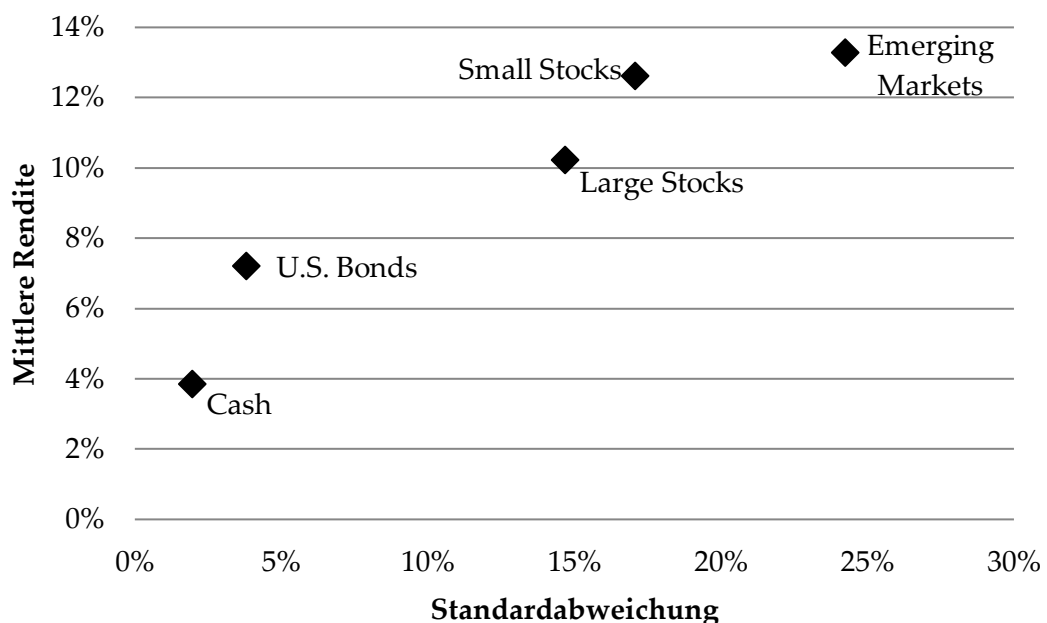
Tabelle 2: Rendite und Risiko von unterschiedlichen Anlageklassen (USA 1990 – 2010)

Anlageklasse	Mittlere, jährliche Rendite (%)	Standardabweichung (%)
Large stocks	10.24	14.70
Small stocks	12.62	17.07
Emerging Markets	13.29	24.26
U.S. Bonds	7.22	3.82
Cash	3.85	1.98

Quelle: Xiong / Idzorek (2011).

Überträgt man nun diese Werte von Xiong und Idzorek in ein Diagramm mit der Standardabweichung auf der x-Achse und der Rendite auf der y-Achse, so lässt sich der zuvor theoretisch proklamierte Unterschied zwischen den unterschiedlichen Anlageklassen auch graphisch nachweisen. In Abbildung 2.2 wird im Risiko-Rendite-Diagramm sehr schön ersichtlich, dass eine höhere Rendite mit einem höheren Risiko einhergeht. Während «Emerging Markets» ein grosses Gewinnpotenzial haben, schlagen sie auch mit einer sehr hohen Standardabweichung zu Buche. Ganz im Gegenteil dazu stehen die mittleren jährlichen Renditen von U.S. Bonds oder jene von Cash. Die Zuschreibung, dass diese Anlageklassen als weniger risikoreich gelten, spiegelt sich auch in ihren tieferen mittleren jährlichen Renditen wieder.

Grundsätzlich gilt deshalb die folgende Regel: Eine höhere Rendite ist nur durch das Eingehen eines höheren Risikos realisierbar.

Abbildung 2.2: Risiko-Rendite-Diagramm anhand Anlageklassen (USA 1990 – 2010)

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Xiong / Idzorek (2011).

In der Folge wird nun auf die Berechnung von Rendite und Risiko (gemessen durch die Varianz/Standardabweichung) eines Portfolios eingegangen.

2.1.2 Portfoliorendite

Die Berechnung von Risiko und Rendite für eine einzelne Anlage wurde bereits in Banking and Finance II besprochen. Die meisten Investoren halten aber nicht nur eine einzelne Anlage, sondern mehrere Anlagen kombiniert in einem Portfolio. Nachfolgend wird daher erläutert, wie die Rendite eines Portfolios bestimmt werden kann.

In einem diversifizierten Portfolio gibt es eine Vielzahl an Anlagen, welche ganz unterschiedliche Renditeeigenschaften aufweisen. Aus diesem Grund ist die Rendite auf einer einzelnen Anlage für einen Investor, der ein Portfolio hält, weniger wichtig. Entscheidend ist lediglich die Rendite auf seinem gesamten Portfolio und dessen Wertschwankungen.

Die Portfoliorendite der Anlage wird als gewichtetes Mittel der Renditen der einzelnen Anlagen berechnet. Die Gewichte bilden die Anteile der einzelnen Anlagen am gesamten Portfolio (λ_k :⁷ Relativer Portfolioanteil der Anlage k zu Beginn einer Periode, R_k : Rendite der Anlage k):

$$R_{PF} = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \dots + \lambda_{N-1} R_{N-1} + \lambda_N R_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k R_k \quad (2.1)$$

Nebst der historischen Portfoliorendite existiert die erwartete Portfoliorendite. Sie entspricht jener Rendite, die ein Anleger aufgrund seines eingegangenen Risikos in der Zukunft erwartet.

2.1.3 Portfoliorisiko

Während die Berechnung der erwarteten Rendite eines Portfolios als der gewichtete Durchschnitt der erwarteten Renditen der einzelnen, im Portfolio enthaltenen Wertschriften berechnet werden konnte, gestaltet sich die Berechnung des Risikos desselben Portfolios wesentlich komplexer. Die Standardabweichung des Portfolios ist in der Regel kleiner als der gewichtete Durchschnitt der Standardabweichungen der einzelnen Anlagen. Diese Reduktion des Risikos im Portfolio nennt man Diversifikation und wird in Abschnitt 2.2.2 genauer beschrieben. Massgebend für die Stärke des Diversifikationseffekts sind die Bewegungen zwischen den Renditen zweier Anlagen. Als Masse hierfür dienen Kovarianz und Korrelation.

Kovarianz und Korrelation

Die Kovarianz ist eine Kennzahl, welche angibt, wie sich eine Variable in Abhängigkeit einer anderen Variablen bewegt. Anhand der Kovarianz kann beispielsweise eine Aussage getroffen werden, ob ein hoher Renditewert der Anlage A tendenziell mit einem hohen Renditewert der Anlage B einhergeht ($\sigma_{AB} > 0$), oder tendenziell eher mit einem tiefen Renditewert der Anlage B ($\sigma_{AB} < 0$).

Da die Werte der Kovarianz zwischen minus und plus unendlich liegen, können lediglich Aussagen über die Richtung des Zusammenhangs zweier Variablen getätigt werden. Kovarianzen sind damit weder standardisiert noch vergleichbar.

⁷ Der relative Portfolioanteil wird sonst oft auch als w bezeichnet.

Die Kovarianz für den Zwei-Wertpapier-Fall (Portfolio mit zwei Wertpapieren (A und B), wird folgendermassen berechnet:

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{A,t} - \bar{R}_A)(R_{B,t} - \bar{R}_B) \quad (2.2)$$

wobei:

- σ_{AB} : Kovarianz von A und B
- $R_{A,t}$: Rendite der Anlage A für Zeitperiode t
- \bar{R}_A : Mittelwert der Renditen der Anlage A

Damit die Kennzahl vergleichbar wird, muss die Kovarianz in die Kennzahl der Korrelation überführt werden. Dies geschieht durch die Standardisierung mit Hilfe der einzelnen Standardabweichungen (σ , Wurzel der Varianz):

$$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} \quad (2.3)$$

Varianz und Standardabweichung eines Portfolios mit 2 Anlagen

Die Korrelation der Renditen der einzelnen Wertpapiere eines Portfolios untereinander hat – wie bereits gezeigt – einen wesentlichen Einfluss auf das Risiko respektive die Volatilität des Portfolios. Dies zeigt auch die Formel für die Berechnung der Varianz eines Portfolios mit zwei Wertpapieren:

$$\sigma_{PF}^2 = \lambda_A^2 \sigma_A^2 + \lambda_B^2 \sigma_B^2 + 2\lambda_A \lambda_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} \quad (2.4)$$

wobei:

- σ_{PF}^2 : Portfoliovarianz
- λ_A : Gewichtung der Anlage A
- σ_A : Standardabweichung der Anlage A
- ρ_{AB} : Korrelationskoeffizient von A und B

Die Portfolio-Standardabweichung (Volatilität) für zwei Wertpapiere wird folgendermassen berechnet:

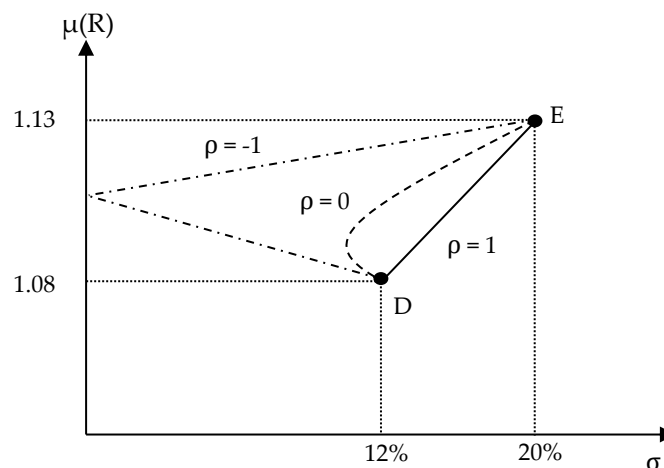
$$\sigma_{PF} = \sqrt{\sigma_{PF}^2} = \sqrt{\lambda_A^2 \sigma_A^2 + \lambda_B^2 \sigma_B^2 + 2\lambda_A \lambda_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}} \quad (2.5)$$

In der Realität sind die meisten Anlagen positiv, aber nicht perfekt positiv korreliert. Im Durchschnitt beträgt der Korrelationskoeffizient der Renditen von zwei zufällig ausgewählten Aktien ungefähr +0.6. Für die meisten Aktienpaare liegt der Korrelationskoeffizient zwischen +0.5 und +0.7. Unter solchen Bedingungen bewirkt das Hinzufügen zusätzlicher Aktien in ein Portfolio zwar eine Reduktion der Portfoliovolatilität, nicht jedoch eine vollständige Elimination.

Je kleiner die Korrelation zwischen zwei Anlagen, desto grösser der Vorteil der Diversifikation. Der maximal mögliche Diversifikationseffekt respektive Portfoliorisikoreduktion stellt das Beifügen eines Titels mit einem Korrelationskoeffizienten von $\rho = -1$ dar.

Abbildung 2.3 zeigt uns zwei Anlagen (Anlage D und E) im Risiko-Rendite-Diagramm. Während die Anlage E ein eher risikoreicher Titel mit einer Standardabweichung von 20% und einer erwarteten Netto-Rendite von 13% ist, so steht es um die Rendite- und Risikowerte von Anlage D mit 8% resp. 12% wesentlich konservativer.

Abbildung 2.3: Erwartetes Portfoliorisiko aus zwei risikobehafteten Wertpapieren in Abhängigkeit der Korrelation



Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Bodie, Kane und Marcus (2013).

Kombiniert man nun diese beiden Anlagen zu einem Portfolio, wird ersichtlich, dass die Rendite-Risiko-Kombination erheblich von der Korrelation zwischen den beiden Anlagen abhängt. Sind die beiden Anlagen perfekt positiv korreliert ($\rho = 1$) so kann man eine Netto-Rendite zwischen 8% und 13% erwarten, der ein Schwankungsbereich von 12% bis zu 20% in der Standardabweichung zugrunde liegt. Alle möglichen Kombinationen werden folglich durch die Gerade zwischen Anlage D und E dargestellt. Zudem werden in Abbildung 2.3 die möglichen Portfoliokombinationen mit einem Korrelationskoeffizienten von $\rho = \pm 1$ oder $\rho = 0$ ersichtlich.

Der höchste Diversifikationseffekt wird erreicht, wenn $\rho = -1$ ist. Da sich beide Anlagen bei Marktbewegungen in eine jeweils komplett andere Richtung bewegen, könnte der Investor mit einer optimalen Gewichtung in beiden Anlagen eine sichere Rendite von fast 10% und eine Portfoliostandardabweichung von null (d.h. risikolos) erzielen.

2.2 Risiko eines Portfolios mit n Anlagen

2.2.1 Berechnung der Portfoliovarianz

Im vorherigen Unterkapitel sind wir jeweils von einem Portfolio mit zwei Anlagen ausgegangen. Dieselben Überlegungen halten auch für ein Portfolio mit n Anlagen, jedoch gestalten sich die Berechnungen wesentlich aufwendiger. Für diese Berechnungen benötigen wir folgende Matrix, auch Kovarianzmatrix genannt, welche Aufschluss über die Kovarianzen der einzelnen Wertpapiere untereinander gibt:

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{Var}(X_n) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Um nun das Portfoliorisiko bestimmen zu können, werden zusätzlich die Gewichte der einzelnen Anlagen benötigt. Wird die Kovarianzmatrix gemäss den Gewichten der Anlagen im Portfolio gewichtet, so erhalten wir folgende Matrix:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 \sigma_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 \sigma_{1,2} & \cdots & \lambda_1 \lambda_n \sigma_{1,n} \\ \lambda_2 \lambda_1 \sigma_{2,1} & \lambda_2^2 \sigma_2^2 & \cdots & \lambda_2 \lambda_n \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n \lambda_1 \sigma_{n,1} & \lambda_n \lambda_2 \sigma_{n,2} & \cdots & \lambda_n^2 \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Die Portfoliovarianz entspricht nun der Summe der gewichteten Kovarianzen aus der vorherigen Matrix, welche sich verkürzt wie folgt darstellen lässt:

$$\sigma_{PF}^2 = \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \lambda_k \lambda_j \sigma_{k,j} \quad (2.8)$$

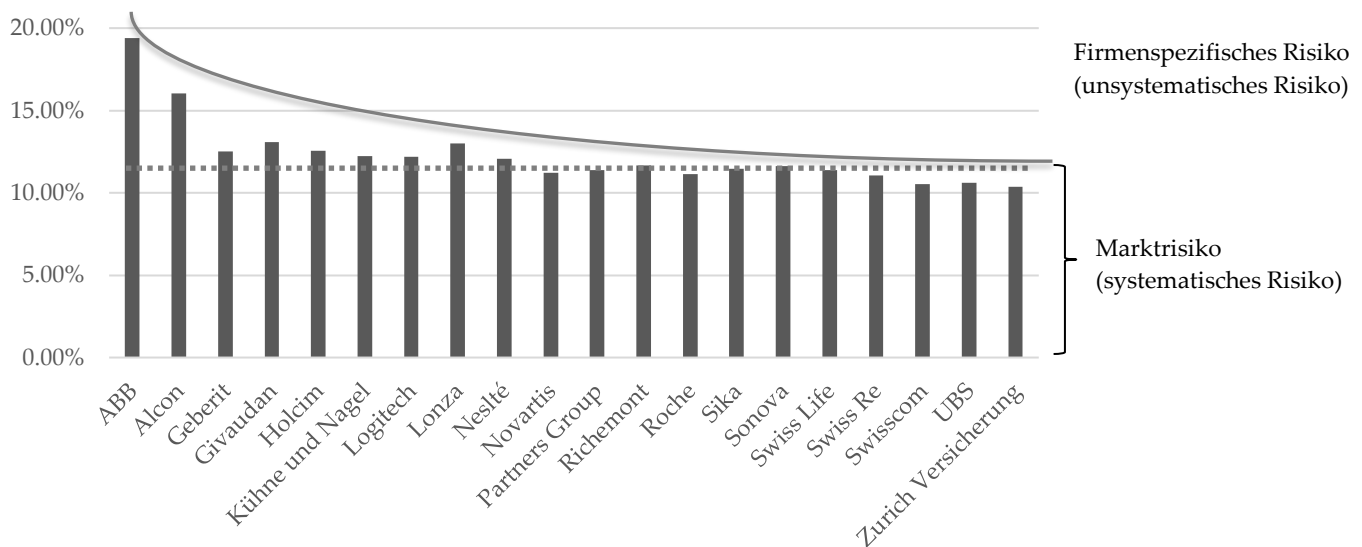
Die dazugehörige Standardabweichung des Portfolios errechnet sich, analog zu den Berechnungen mit 2 Anlagen, wie folgt:

$$\sigma_{PF} = \sqrt{\sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \lambda_k \lambda_j \sigma_{k,j}} \quad (2.9)$$

2.2.2 Systematisches und unsystematisches Risiko

Je mehr Titel einem Portfolio hinzugefügt werden, desto stärker wirkt der Diversifikationseffekt. Allerdings nicht unbeschränkt: In der Regel kann mittels Diversifikation beinahe die Hälfte des Risikos einer einzelnen Aktie eliminiert werden (in der Regel reichen bereits 10 bis 15 Titel). Der eliminierbare Teil gehört zur unsystematischen Komponente, auch idiosynkratisches oder unternehmensspezifisches Risiko genannt. Sie lässt sich mittels Diversifikation – also der Beimischung von mehreren, nicht perfekt positiv korrelierenden Anlagen in einem Portfolio – reduzieren. Der andere, systematische Teil des Risikos bleibt aber erhalten, da es nicht möglich ist, die Effekte von breiten Marktbewegungen komplett weg zu diversifizieren, weil diese Marktbewegungen alle Aktien bis zu einem gewissen Grad gleichermassen beeinflussen.

Die folgende Abbildung 2.4 zeigt den Diversifikationseffekt mit einer simplen Portfoliobildungsregel: In das Portfolio werden neue Titel nach ihrer Reihenfolge im Alphabet aufgenommen. Dabei werden alle Titel mit derselben Gewichtung $\frac{1}{N}$ aufgenommen. Bereits nach wenigen Titeln ist beinahe die Hälfte der ursprünglichen Volatilität «wegdiversifiziert».

Abbildung 2.4: «Naive» Diversifikationsregel anhand Renditen SMI (15.07.2024)

Quelle: Eigene Darstellung, basierend auf Daten der SIX Swiss Exchange.

Der Grund für die Diversifikation liegt darin, dass die Standardabweichung das Kriterium der Subadditivität erfüllt, was in folgenden Punkten erläutert wird:

- Die Standardabweichung eines Portfolios kann nicht grösser sein als die gewichtete Summe der einzelnen Standardabweichungen.
- Wird ein weiterer Titel mit Gewicht w einem Portfolio hinzugefügt, so kann die Standardabweichung des gesamten Portfolios im Extremfall (bei einer Korrelation von 1) höchstens um $w * \sigma$ des hinzugefügten Titels steigen.
- Korreliert der Titel nicht perfekt mit dem Portfolio (Korrelation kleiner 1), dann steigt das Risiko des Portfolios um weniger als das Einzelrisiko.

Wie der Effekt der Diversifikation funktioniert, wird in folgendem Beispiel aus Mondello (2018) verdeutlicht. Als Basis verwenden wir hierfür ein Portfolio, welches ausschliesslich aus Long-Positionen⁸ besteht.

Der Diversifikationseffekt eines Portfolios aus Long-Positionen lässt sich am besten wie folgt zeigen: Angenommen es gibt ein gleichgewichtetes Portfolio aus Anlagen ($\lambda_k = \frac{1}{N}$), welche alle über dieselbe durchschnittliche Varianz ($\bar{\sigma}^2$) und Kovarianz (\overline{Cov}) verfügen. Die in 2.2 beschriebene Tabelle vereinfacht sich dadurch, da wir auf der Diagonalen (die Varianzen der einzelnen Anlagen) sowie oberhalb wie unterhalb (Kovarianzen) jeweils gleich grosse Werte haben:

⁸ In einem Portfolio aus Long-Positionen werden ausschliesslich nicht-negative Bestände der Anlagen gehalten. Alternativ dazu können Anlagen auch leerverkauft werden - man hält somit einen negativen Bestand einer Anlage. In diesem Zusammenhang spricht man von sogenannten Short-Positionen.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{N^2} \bar{\sigma}^2 & \dots & \frac{1}{N^2} \overline{Cov} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N^2} \overline{Cov} & \dots & \frac{1}{N^2} \bar{\sigma}^2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Die Varianz des Portfolios errechnet sich nun wie folgt:

$$\sigma_{PF}^2 = N \left(\frac{1}{N^2} \right) \bar{\sigma}^2 + N(N-1) \left(\frac{1}{N^2} \right) \overline{Cov} \quad (2.11)$$

welche sich wie folgt vereinfachen lässt:

$$\sigma_{PF}^2 = \left(\frac{1}{N} \right) \bar{\sigma}^2 + \left(\frac{N-1}{N} \right) \overline{Cov} \quad (2.12)$$

Die Varianz dieses speziellen Portfolios lässt sich als gewichtete Summe der durchschnittlichen Varianz und Kovarianz der einzelnen Anlagen beschreiben. Anhand dieser Formel lässt sich der eingangs beschriebene Diversifikationseffekt aufzeigen: Konvergiert N gegen unendlich, so strebt die Portfoliovarianz gegen die durchschnittliche Kovarianz. Somit lassen sich die Varianzen der einzelnen Anlagen durch Diversifikation eliminieren, während die durchschnittliche Kovarianz bestehen bleibt. Dies entspricht dem eingangs beschriebenen Effekt des Marktrisikos, welches sich nicht wegdiversifizieren lässt. Durch bessere Diversifikation verschwinden nur die Varianzen der einzelnen Anlagen (Mass für das firmenspezifische Risiko), während die durchschnittliche Kovarianz (als Mass für das systematische Risiko) in der Portfoliovarianz bestehen bleibt.

Für einen Investor, der über ein gut diversifiziertes Portfolio verfügt, ist somit nicht das Risiko einer einzelnen Anlage (Varianz) entscheidend. Vielmehr ist von Bedeutung, wie sehr eine zusätzliche Anlage zur Diversifikation beiträgt, sprich das Portfoliorisiko reduziert. Dieser Effekt hängt von der Kovarianz bzw. der Korrelation der neuen Anlage zu den übrigen Anlagen im Portfolio ab.

Eine der zentralen Fragestellungen im Portfoliomanagement beschäftigt sich mit der Frage nach der Anzahl Anlagen, die für ein gut diversifiziertes Portfolio erforderlich sind. Betrachten wir nochmals die obenstehende Gleichung (2.12) und vereinfachen sie, indem wir die durchschnittliche Kovarianz durch das Produkt aus dem durchschnittlichen Korrelationskoeffizienten und der durchschnittlichen Varianz ersetzen:

$$\sigma_{PF}^2 = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{1-\bar{\rho}}{N} + \bar{\rho} \right) \quad (2.13)$$

Dieser Term zeigt auf, wie die Varianz des Portfolios von der Anzahl Titel im Portfolio zusammenhängt. Verfügt das Portfolio über lediglich eine Anlage, so entspricht die Varianz des Portfolios gerade der durchschnittlichen Varianz dieser Anlage. Werden weitere Anlagen zu diesem Portfolio hinzugefügt, so sinkt die Varianz der Portfolios.

2.3 Portfoliotheorie

Die Portfoliotheorie umfasst eine Reihe von Instrumenten, mit Hilfe derer sich die optimale Zusammensetzung eines Finanzportfolios, zum Beispiel aus Barmitteln, Aktien und Obligationen, bestimmen lässt. Dabei ist die Grundidee, die imperfekte Korrelation der Anlagen zu nutzen und so das Portfolio zu diversifizieren.

2.3.1 Repetition: Mean-Variance-Portfolio

Bei der im Jahr 1952 von Harry Markowitz vorgestellten Mean-Variance-Analyse [MVA] wird das Risiko und die durchschnittliche Rendite mehrerer Wertpapiere miteinander verglichen⁹. Das Risiko einer Anlage wird in diesem Kontext durch die Varianz ausgedrückt. Die erwartete Rendite für ein Asset k wird in diesem Skript mit $\mu(R_k)$ bezeichnet¹⁰. Häufig werden diese beiden Grössen in einem Risiko-Rendite-Diagramm dargestellt, anhand dessen leicht ein Trade-Off zwischen Risiko und Rendite festzustellen ist. Ziel ist es nun ein Portfolio mit einem optimalen Rendite-Risiko-Profil zu finden. Ein optimales Portfolio ist das sogenannte Minimum-Varianz-Portfolio, welches über die kleinste Varianz aller möglicher Portfolios verfügt. Folgend wird gezeigt, wie man die erwartete Rendite und die Standardabweichung des Minimum-Varianz-Portfolios mit zwei Anlagen (A und B) herleitet.

Portfoliooptimierung: Kochrezept Minimum-Varianz-Portfolio

Formeln:

$$\sigma_{PF}^2 = \lambda_A^2 \sigma_A^2 + \lambda_B^2 \sigma_B^2 + 2\lambda_A \lambda_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}$$

$$\mu(R_{PF}) = \lambda_A \cdot \mu(R_A) + \lambda_B \cdot \mu(R_B)$$

Schritt 1: Investor investiert insgesamt 100% in Wertpapier A und B

$$\lambda_B = 1 - \lambda_A$$

Schritt 2: Substitution des Gewichtes von Anlage B

$$\sigma_{PF}^2 = \lambda_A^2 \sigma_A^2 + (1 - \lambda_A)^2 \sigma_B^2 + 2\lambda_A(1 - \lambda_A) \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}$$

Schritt 3: Minimierung der Portfoliovarianz durch Ableitung

$$\frac{\partial \sigma_{PF}^2}{\partial \lambda_A} = 2\lambda_A \sigma_A^2 - 2(1 - \lambda_A) \sigma_B^2 + 2(1 - \lambda_A) \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} - 2\lambda_A \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} = 0$$

Schritt 4: Vereinfachung des Terms

$$\lambda_A = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

$$\lambda_B = 1 - \lambda_A$$

Schritt 5: Berechnung der erwarteten Portfoliorendite und -varianz in einem Zwei Wertpapier-Fall

⁹ Markowitz' Arbeit war zum Zeitpunkt ihres Erscheinens revolutionär. 1990 wurde er zusammen mit Merton Miller und William Sharpe für die Portfoliotheorie mit dem Wirtschaftsnobelpreis ausgezeichnet.

¹⁰ Die erwartete Rendite $\mu(k)$ wird sonst oft als $E(r_k)$ bezeichnet.

2.3.2 Herleitung der Efficient Frontier

Ausgehend vom Mean-Variance-Portfolio kann die sogenannte Efficient Frontier hergeleitet werden. Hierbei wird für jedes gegebene Renditeniveau die resultierende Portfoliovarianz minimiert. Die Efficient Frontier definiert somit alle möglichen Portfolios, die über eine «effiziente» Kombination von Risiko und Rendite verfügen. Anders ausgedrückt berechnen wir nun das Minimum-Varianz-Portfolio für jedes mögliche Renditeziel.

Formal geschrieben genügen alle Portfolios auf der Efficient Frontier folgendem Minimierungsproblem:

$$\min_{\lambda_k} \sigma_{PF}^2 = \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \lambda_k \lambda_j \sigma_{k,j} \quad (2.14)$$

Unter den Nebenbedingungen:

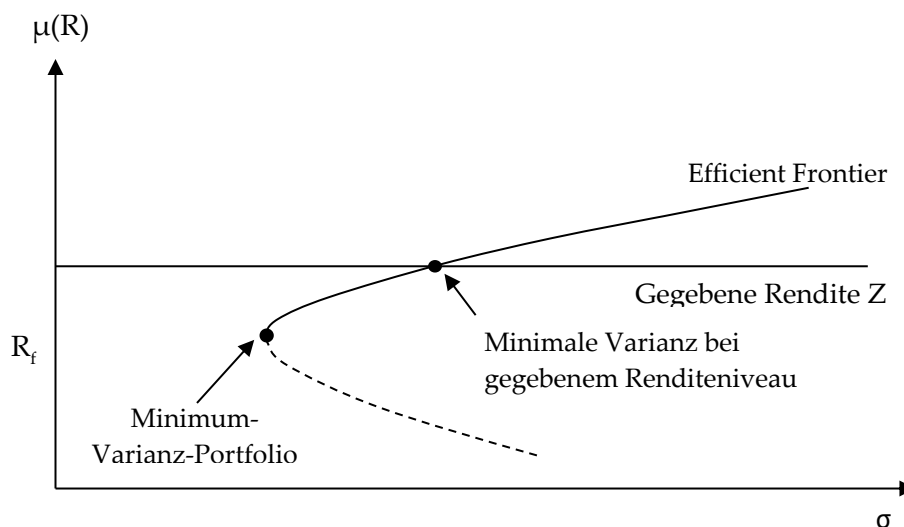
$$\mu(R_{PF}) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mu(R_k) = Z \quad (2.15)$$

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1 \quad (2.16)$$

Konkret wird für die Bestimmung der Efficient Frontier die Portfoliovarianz minimiert, gegeben eine bestimmte erwartete Portfoliorendite (Z) und die Summe der einzelnen Gewichte ergibt 1. Hierbei wird angenommen, dass auch Short-Positionen in den einzelnen Anlagen möglich sind. Sollten aufgrund der Anlagepolitik keine Short-Positionen zulässig sein, so wird dem Optimierungsproblem die zusätzliche Nebenbedingung hinzugefügt, dass die einzelnen Anlagegewichte positiv oder Null sein müssen. ($\lambda_k \geq 0, \forall k = 1, \dots, N$)

Wird diese Optimierung für jedes mögliche Renditeniveau des Portfolios wiederholt, so ergibt sich grafisch das folgende Bild der Efficient Frontier:

Abbildung 2.5: Efficient Frontier



Quelle: Eigene Darstellung.

Daraus wird beispielsweise auch ersichtlich, dass alle Portfolios unterhalb der Efficient Frontier nicht optimal sind, weil z.B. durch eine Änderung der Gewichtungen der einzelnen Anlagen im Portfolio für ein gegebenes Risikoniveau eine höhere Rendite erzielt werden kann.

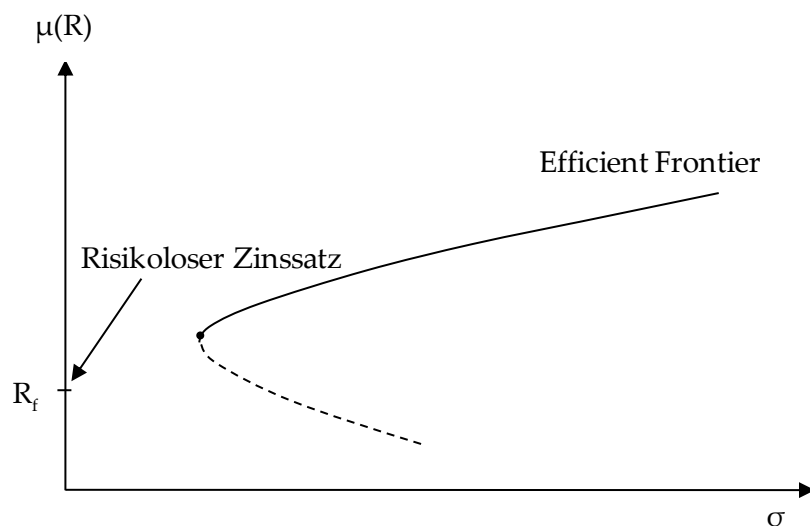
Die Efficient Frontier wird üblicherweise mithilfe von Algorithmen berechnet. In Microsoft Excel beispielsweise können solche Probleme mithilfe des «Solvers» gelöst werden.

2.3.3 Repetition: Herleitung des Tangentialportfolios

Risikolose Anlage

Das Konzept der Efficient Frontier kann um eine risikolose Anlage (R_f) erweitert werden. Per Definition hat diese Anlage eine Standardabweichung von Null. In der Praxis werden hierfür oftmals Staatsanleihen von Ländern mit AAA-Ratings verwendet, unter der Annahme, dass diese annäherungsweise risikolos sind. Ein häufiger Kritikpunkt dieser Annahme ist der Fakt, dass auch bei Staatsanleihen Zinsänderungs-, Kredit- und Inflationsrisiken eine Rolle spielen (siehe Abbildung 2.2). Darum wird häufig auch ein Cash-Account als risikolose Anlage verwendet. Allerdings liefern Cash-Kontos momentan keine oder negative Zinsen.

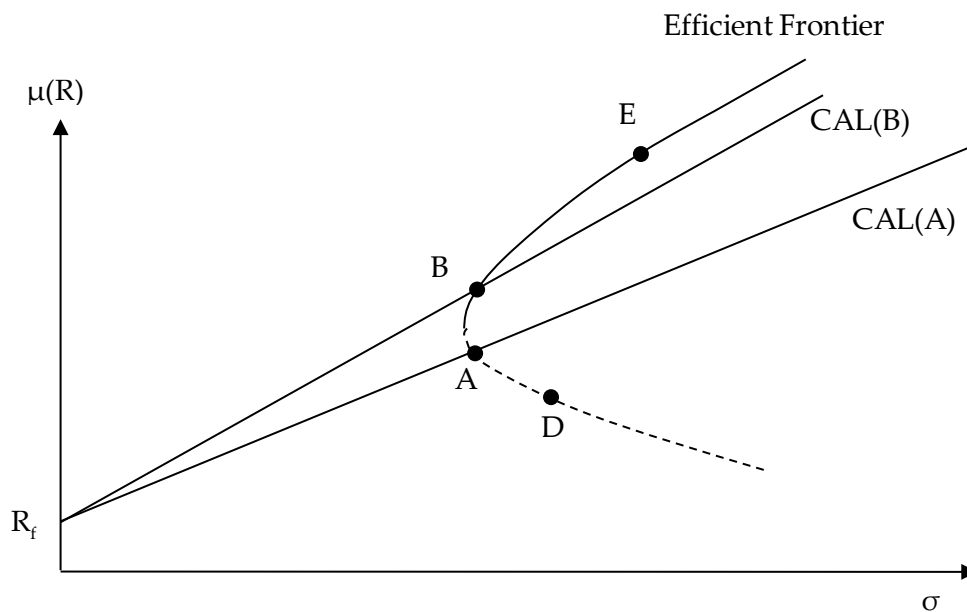
Abbildung 2.6: Efficient Frontier mit risikolosem Zinssatz



Quelle: Eigene Darstellung.

Capital Allocation Line (CAL)

Durch die Aufnahme der risikolosen Anlage ins Anlageuniversum eines Investors entstehen neue Risiko-Rendite Kombinationen. Diese liegen neu auf den Verbindungslinien ausgehend von der risikolosen Anlage zu den einzelnen Assets / Portfolios. Diese Verbindungslinien bezeichnet man als Capital Allocation Line (CAL). Die CAL zeigt demnach alle möglichen Risiko-Rendite Kombinationen eines Portfolios, das sich aus einer risikolosen Anlage und einem risikobehafteten Portfolio zusammensetzt.

Abbildung 2.7: Capital Allocation Line

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Bodie, Kane und Marcus (2013).

In Abbildung 2.7 sind zwei verschiedene CAL gezeichnet, die unterschiedliche Steigungen haben. Es ist dabei unschwer zu erkennen, dass die CAL(B) ein besseres Risiko-Rendite-Profil aufweist als die CAL(A). Die CAL mit dem besten Risiko-Rendite-Profil ist sogleich auch jene CAL, welche über die grösste Steigung verfügt. Ziel ist es deshalb, die Steigung der CAL zu maximieren.

Die Steigung der CAL wird als Sharpe-Ratio bezeichnet und ist wie folgt definiert:

$$S_{PF} = \frac{\mu(R_{PF}) - R_f}{\sigma_{PF}} \quad (2.17)$$

wobei:

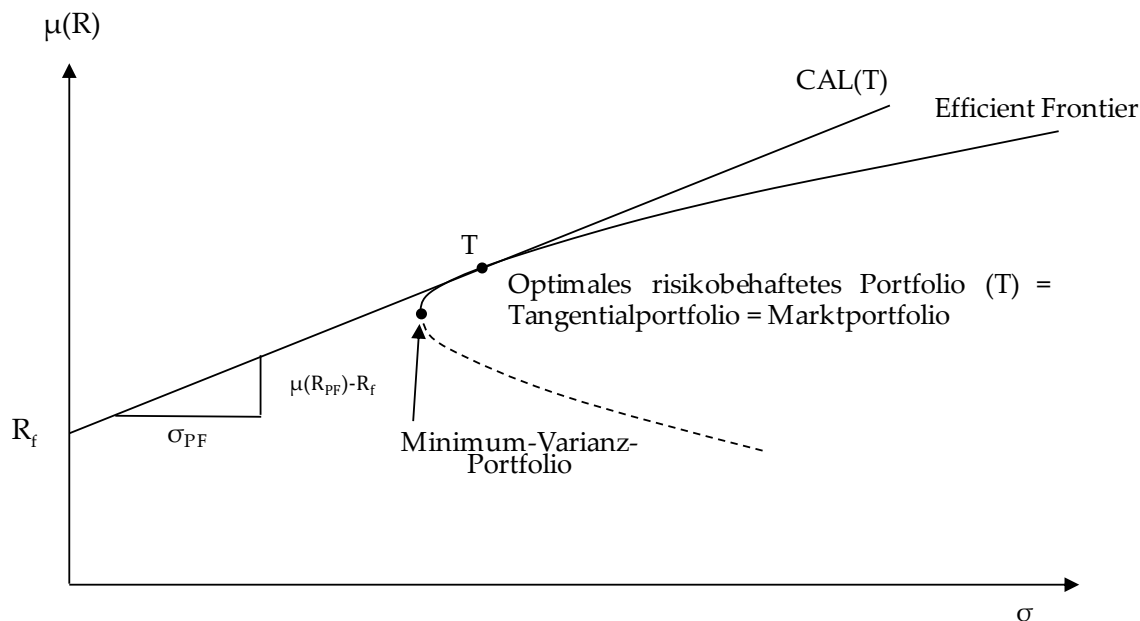
- $\mu(R_{PF})$: Erwartete Rendite des Portfolios PF
- R_f : Rendite der risikolosen Anlage
- σ_{PF} : Standardabweichung des Portfolios PF

Tangentialportfolio

Das Tangentialportfolio ist definiert als jenes Portfolio, in welchem die CAL gerade tangential zur Efficient Frontier ist. Es wird somit die CAL gesucht, welche über die grösstmögliche Steigung verfügt. Um diese CAL zu finden, muss die Sharpe-Ratio maximiert werden. Das Maximierungsproblem lautet wie folgt, wobei λ_k sowohl innerhalb des Zählers (Rendite) als auch des Nenners (Risiko) ist:

$$\max_{\lambda_k} S_{PF} = \frac{\mu(R_{PF}) - R_f}{\sigma_{PF}}, \text{ wobei } \sum_{k=1}^I \lambda_k = 1 \quad (2.18)$$

Abbildung 2.8: Tangentialportfolio



Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Bodie, Kane und Marcus (2013).

Die CAL(T) verfügt somit über das optimale Rendite-Risiko-Profil und das zugehörige Tangentialportfolio wird somit als «effizient» bezeichnet. Bewegt man sich auf der Tangentialgeraden CAL, so resultiert die gewünschte Risiko-Rendite-Kombination ausschliesslich aus der Variation zwischen dem Anteil der risikolosen und der risikobehafteten Anlage, also dem Tangentialportfolio (Tobin (1958)).

Werden nun folgende Annahmen zugrunde gelegt, so haben alle Investoren dasselbe Tangentialportfolio, d.h. es gilt die Two-Fund Separation von Tobin:

- Die Marktteilnehmer haben homogene Erwartungen.
- Kapitalmärkte sind vollständig, das heisst es existieren keine Hintergrundrisiken.

Wenn man zusätzlich annimmt, dass die Märkte im Gleichgewicht sind, also Angebot = Nachfrage gilt, so muss das Tangentialportfolio λ^T proportional zu dem Marktportfolio λ^M sein. Hier ein formales Argument. Wegen der Two-Fund-Separation hat jedes Portfolio die folgende Struktur:

$$\lambda^i = (\lambda_0^i, \lambda_1^i, \dots, \lambda_k^i) = (\lambda_0^i, (1 - \lambda_0^i)\lambda_1^T, \dots, (1 - \lambda_0^i)\lambda_k^T) \quad (2.19)$$

Multiplizieren mit dem relativen Vermögen der Anleger $r^i = \frac{w^i}{\sum_{i=1}^I w^i}$ und Summieren über i ergibt:

$$\sum_{i=1}^I r^i \lambda^i = \left(\sum_{i=1}^I r^i \lambda_0^i, \sum_{i=1}^I r^i (1 - \lambda_0^i) \lambda_1^T, \dots, \sum_{i=1}^I r^i (1 - \lambda_0^i) \lambda_k^T \right) = (\lambda_0^M, \lambda_1^M, \dots, \lambda_k^M) \quad (2.20)$$

Wobei λ_k^M die relative Marktkapitalisierung ist. Wieso $\sum_{i=1}^I r^i \lambda^i = \lambda^M$ ist, zeigen wir in Abschnitt (3.2). Die Capital Allocation Line (CAL) wird folglich auch als Capital Market Line [CML] bezeichnet und das Tangentialportfolio wird zum Marktportfolio.

Formeln für das Berechnen des Tangentialportfolios im Zwei-Wertpapier-Fall:

Maximierung der Sharpe Ratio:

$$\max_{\lambda_A, \lambda_B} S_{PF} = \frac{\mu(R_{PF}) - R_f}{\sigma_{PF}}, \text{ wobei } \lambda_A + \lambda_B = 1 \quad (2.21)$$

Erwartete Rendite und Standardabweichung im Zwei-Wertpapier Fall:

$$\mu(R_{PF}) = \lambda_A \cdot \mu(R_A) + \lambda_B \cdot \mu(R_B) \quad (2.22)$$

$$\sigma_{PF}^2 = \lambda_A^2 \sigma_A^2 + \lambda_B^2 \sigma_B^2 + 2\lambda_A \lambda_B \text{Cov}(R_A, R_B) \quad (2.23)$$

$$\text{Cov}(R_A, R_B) = \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} \quad (2.24)$$

Gewichtung des Wertpapiers A im risikobehafteten Portfolio:

$$\lambda_A = \frac{[\mu(R_A) - R_f] \sigma_B^2 - [\mu(R_B) - R_f] \text{Cov}(R_A, R_B)}{[\mu(R_A) - R_f] \sigma_B^2 + [\mu(R_B) - R_f] \sigma_A^2 - [\mu(R_A) - R_f + \mu(R_B) - R_f] \text{Cov}(R_A, R_B)} \quad (2.25)$$

Anhand der Gewichtungen wird ersichtlich, dass das optimale Portfolio nicht von den individuellen Präferenzen eines Investors abhängt. Die Gewichtungen innerhalb des optimalen Portfolios werden lediglich durch die statistischen Eigenschaften der Anlagen determiniert. Gemäss dem Tobin'schen Separationstheorem, welches in Abschnitt 2.5 beschrieben wird, erfolgt die Risikosteuerung durch die Investoren durch eine Aufteilung der Mittel in das optimale Portfolio und eine risikolose Anlage. Wie hoch der Anteil der risikolosen Anlage resp. des Marktportfolios ist, bestimmt die individuelle Risikoneigung. Auf dieses Konzept soll in der Folge eingegangen werden.

2.4 Repetition: Risikoneigung von Individuen

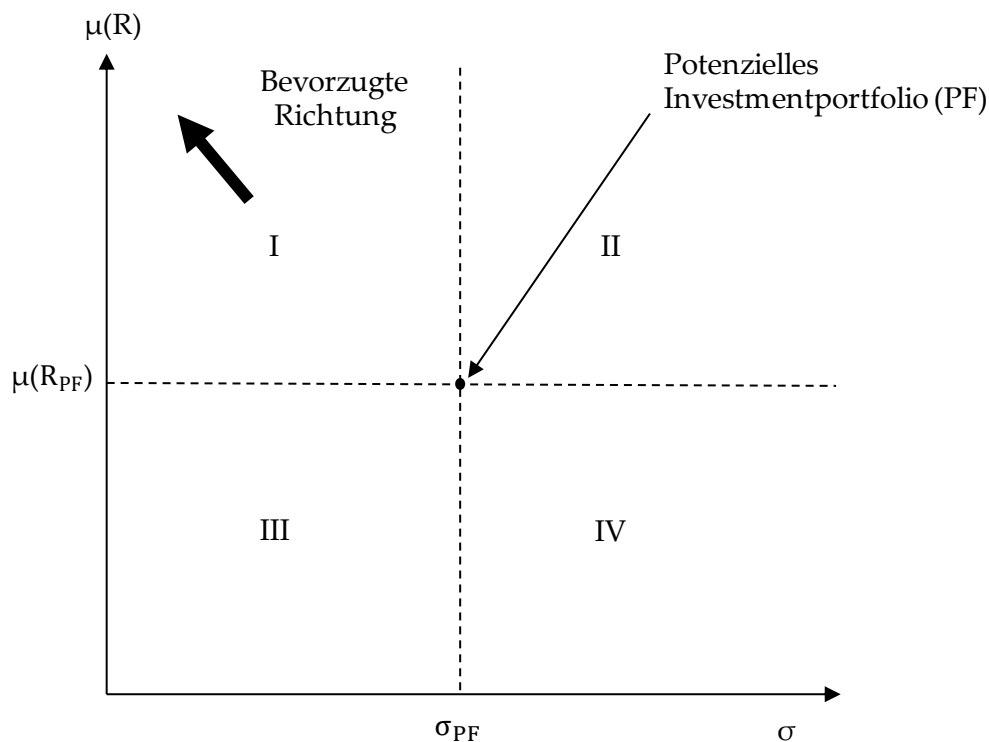
Es gibt viele Kriterien für Entscheidungen unter Risiko. Das Mean-Variance-Kriterium von Markowitz ist eines der einfacheren. Falls Renditen normalverteilt sind, sind die meisten anderen Kriterien äquivalent zum Mean-Variance-Kriterium. Es ist also eine Folge der Effizienzmarkthypothese. An dieser Stelle können wir noch einmal überlegen, ob man Renditen besser als normalverteilt, oder log-normalverteilt annimmt. Für die Annahme der Normalverteilung gilt, dass die Kombination von Renditen, die verbunden¹¹ normalverteilt sind, wieder normalverteilt ist. Sind R_A und R_B normalverteilt, mit Mittelwert μ_A, μ_B und Standardabweichung σ_A, σ_B , so ist die Portfoliorendite $R_{PF} = \lambda R_A + (1 - \lambda) R_B$ normalverteilt mit Mittelwert $\mu_{PF} = \lambda \mu_A + (1 - \lambda) \mu_B$ und $\sigma_{PF}^2 = \lambda^2 \sigma_A^2 + (1 - \lambda)^2 \sigma_B^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \text{Cov}_{A,B}$. Dies gilt jedoch nicht für log-Normalverteilung. Es gibt also kein einfaches Modell für Renditeverteilung, dass diese beiden Kriterien-Aggregation über die Zeit und über Portfolios erfüllt. Zum Trost sei erwähnt, dass der Unterschied zwischen $\ln(1 + r)$ und r für kleine r nicht sehr gross ist.

Das heisst, man kann approximativ annehmen, dass $R - 1$ normal- und R log-normalverteilt ist.

¹¹ The sum of two jointly normally distributed random variables, each with different means, will still have a normal distribution.

In der μ - σ -Welt sucht ein risikoaverser Investor Anlagen, die ein optimales Verhältnis von eingegangenem Risiko zur erwarteten Rendite aufweisen. Die Indifferenzkurven zeigen in Richtung oben-links, da ein Investor möglichst wenig Varianz halten möchte, aber gleichzeitig eine möglichst hohe erwartete Rendite haben will. Indifferenzkurven höheren Nutzens liegen weiter oben-links (I in Abbildung 2.9), Indifferenzkurven niedrigeren Nutzens liegen weiter unten-rechts (IV in Abbildung 2.9). Da der Nutzen mit der Rendite steigt und mit dem Risiko fällt, sind Indifferenzkurven steigend. Bleibt die Rendite gleich, aber die Varianz steigt, wird der Nutzen sinken, deswegen kann ein Punkt, der sich in der Richtung unten-rechts befindet, nicht auf derselben Indifferenzkurve liegen, da der Investor schlechter gestellt wird.

Abbildung 2.9: Bevorzugte Richtung eines risikoaversen Investors in der μ - σ -Welt



Quelle: Eigene Darstellung.

Mittels Indifferenzkurven kann die Risikoneigung von Investoren dargestellt werden. Alle Punkte auf der Indifferenzkurve (z.B. Portfolio PF und Portfolio Q in Abbildung 2.10) ergeben für den Investor denselben Nutzen. Eine Indifferenzkurve ist der geometrische Ort derjenigen Rendite-Risiko-Kombinationen, die zum gleichen Nutzenniveau führen.

Die Mean-Variance-Analyse geht davon aus, dass der Trade-off zwischen mittlerer Rendite und Volatilität durch eine Nutzenfunktion $U(\mu, \sigma)$ beschrieben werden kann. Eine Indifferenzkurve ist der geometrische Ort aller μ, σ Kombinationen, die zu demselben Nutzen führen: $U(\mu, \sigma) = \text{constant}$. Die Indifferenzkurve ist also eine implizit definite Funktion. Somit kann man ihre Steigung aus dem Impliziten Funktionentheorem (Abschnitt Implizites Funktionentheorem) herleiten. Aus dieser Gleichung kann man nun mittels des totalen Differentials die Steigung der Indifferenzkurven ausrechnen. Das totale Differential ist:

$$\partial_{\mu} U(\mu, \sigma) d_{\mu} + \partial_{\sigma} U(\mu, \sigma) d_{\sigma} = 0 \quad (2.26)$$

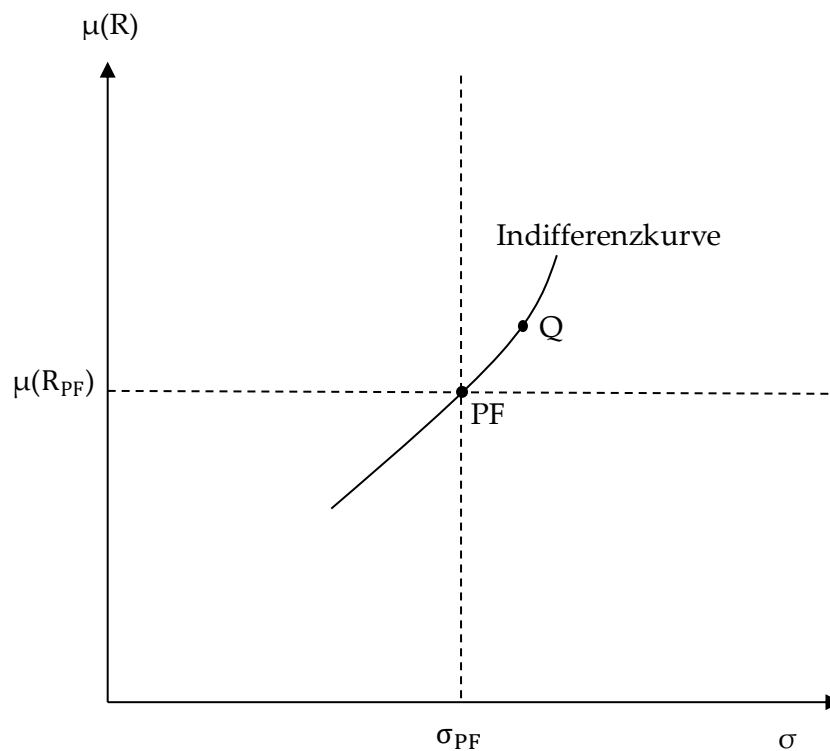
Dabei ist ∂ das Symbol für die partielle Ableitung und d das Symbol für die Schrittweite der Veränderung in die betrachtete Richtung.

Und somit die Steigung der Indifferenzkurven:

$$\frac{d_{\mu}}{d_{\sigma}} = - \frac{\partial_{\sigma} U(\mu, \sigma)}{\partial_{\mu} U(\mu, \sigma)} \quad (2.27)$$

Falls zum Beispiel $U(\mu, \sigma) = \mu - \psi \sigma^2$ ist, dann ist $\frac{d_{\mu}}{d_{\sigma}} = 2\psi\sigma$. Die Steigung ist dann unabhängig von μ , was bedeutet, dass die Indifferenzkurven durch Verschiebung entlang der μ -Achse auseinander hervorgehen, sodass die Steigungen entlang jeder senkrechten Linie gleich sind.

Abbildung 2.10: Indifferenzkurve



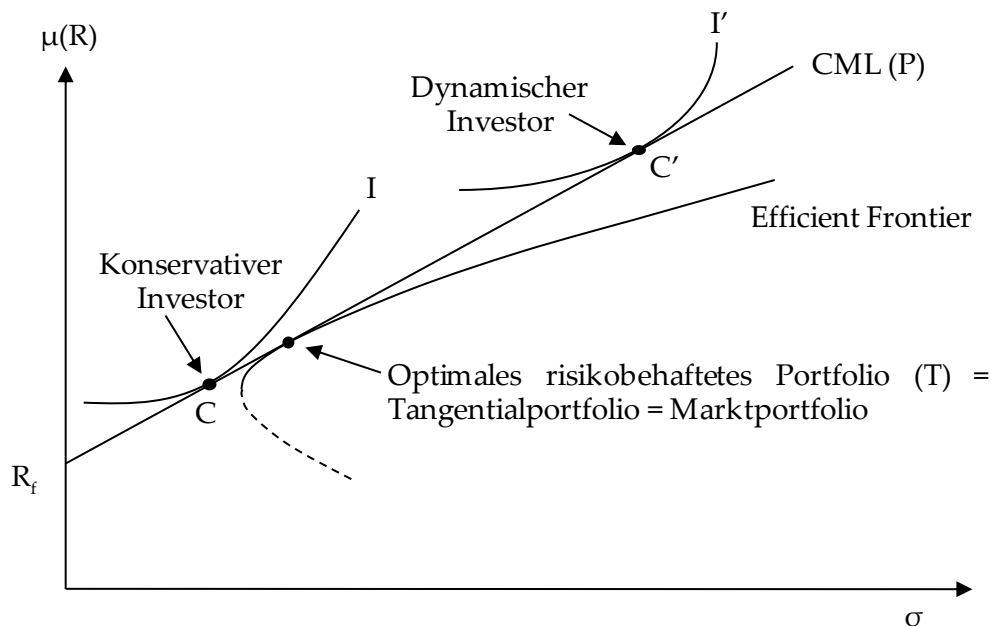
Quelle: Eigene Darstellung.

2.5 Nutzenmaximierende Portfolios

Wie oben geometrisch gezeigt, wird jeder Investor der mehr μ und weniger σ möchte ein Portfolio auf der CAL wählen.

Intuitiv ist verständlich, dass ein konservativer (stark risikoaverser) Investor einen grösseren Anteil seines Vermögens in die risikolose Anlage investiert als ein dynamischer (schwach risikoaverser) Investor. Die nachfolgende Graphik illustriert diesen Zusammenhang.

Abbildung 2.11: Optimales Gesamtportfolio eines konservativen versus dynamischen Investors



Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung Bodie, Kane und Marcus (2013).

Ausgehend vom optimalen risikobehafteten Portfolio (T) mit der erwarteten Rendite von $\mu(R_T)$ und der Standardabweichung σ_T kann nun das optimale Gesamtportfolio (C) unter Berücksichtigung der Risikoaversion (ψ)¹² des Investors gefunden werden. Je grösser ψ , desto risikoaverser ist der Investor: Ein ψ von Null kennzeichnet einen risikoneutralen Investor, ein ψ zwischen eins und drei einen Investor mit mittlerer Risikoaversion und ein ψ von grösser als drei einen Investor mit grosser Risikoaversion. Investoren können nun wiederum je nach Risikoaversion ein geeignetes Portfolio auf der CAL mit dem Tangentialportfolio (T) bilden. Dabei wird ein Anteil λ in das Tangentialportfolio investiert, der Rest $(1 - \lambda)$ in die risikolose Anlage, welche eine Rendite R_f in der Höhe des risikolosen Zinssatzes aufweist. Investoren können so ein besseres Risiko-Rendite-Profil realisieren als durch andere Kombinationen. Je nach Grad der Risikoaversion ψ wird mehr oder weniger in die risikolose Anlage investiert. Generell gilt, dass bei hoher Risikoaversion mehr in die risikolose Anlage investiert wird. Dieses Portfolio aus risikofreier Anlage und Tangentialportfolio nennen wir Gesamtportfolio (GP).

¹² In Banking and Finance II wurde die Risikoaversion als A bezeichnet.

Für einen risikofreudigen Investor ist es auch möglich sich auf der CAL nach rechts vom Tangentialportfolio zu bewegen, indem der Investor Fremdkapital zum sicheren Zinssatz aufnimmt und dieses in das Tangentialportfolio investiert.

Der optimale Anteil λ am Tangentialportfolio (T) kann dabei algebraisch wie folgt hergeleitet werden:

Der Nutzen des Mean-Variance-Investors steigt in der erwarteten Rendite und nimmt ab mit zunehmender Varianz seines Portfolios. Wir versuchen daher den Nutzen des Investors unter Annahme der folgenden Nutzenfunktion zu maximieren:

$$\max_{\lambda} \mu(R_{GP}) - \frac{\psi}{2} \sigma_{GP}^2 \quad (2.28)$$

wobei:

$$\begin{aligned} \mu(R_{GP}): & \quad R_f + \lambda'(\mu(R_T) - R_f) \\ \sigma_{GP}^2: & \quad \lambda^2 \sigma_T^2 \end{aligned}$$

Das Maximierungsproblem kann daher wie folgt umgeschrieben werden:

$$\max_{\lambda} R_f + \lambda'(\mu(R_T) - R_f) - \frac{\psi}{2} \lambda^2 \sigma_T^2 \quad (2.29)$$

Abgeleitet und gleich 0 gesetzt kann diese Gleichung nach dem optimalen prozentualen Anteil des Tangentialportfolios (λ^T) aufgelöst werden. Dieser ist definiert wie folgt:

$$\lambda^T = \frac{\mu(R_T) - R_f}{\psi \sigma_T^2} \quad (2.30)$$

wobei:

$$\begin{aligned} \mu(R_T): & \quad \text{Erwartete Rendite des Tangentialportfolios} \\ R_f: & \quad \text{Rendite der risikolosen Anlage} \\ \psi: & \quad \text{Grad der Risikoaversion} \\ \sigma_T^2: & \quad \text{Varianz des Tangentialportfolios} \end{aligned}$$

Wie bereits in Kapitel 2.3.3 angemerkt, hängen die Gewichtungen innerhalb des optimalen Gesamtportfolios von der Risikoaversion des Investors ab. Dabei variiert zwischen den Investoren lediglich der optimale prozentuale Anteil des Tangentialportfolios (λ^T). Die Gewichtungen innerhalb des Tangentialportfolios verbleiben unabhängig von den individuellen Präferenzen des Investors.

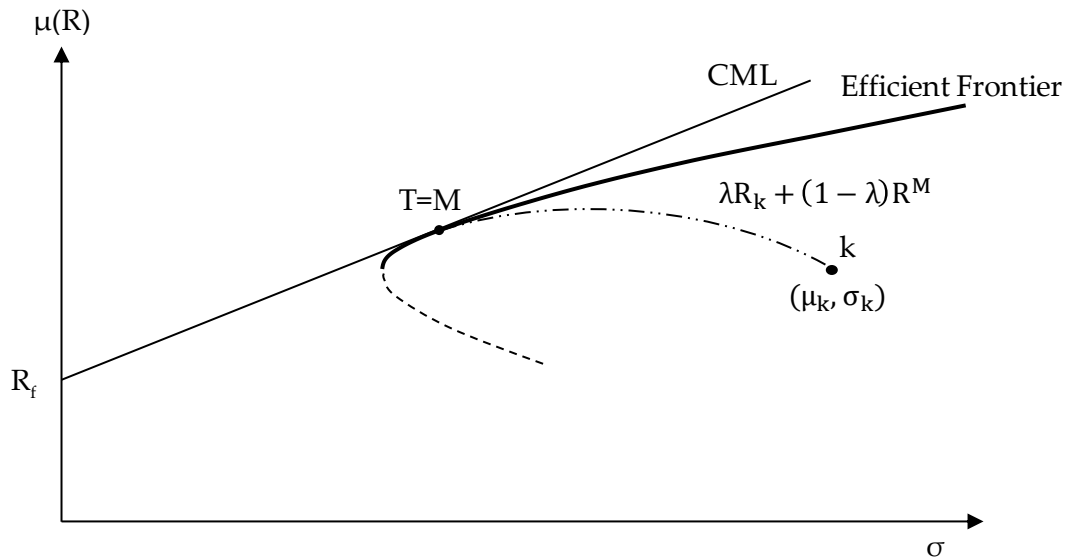
3 Capital Asset Pricing Model [CAPM]

Im Kapitel zuvor wurde die Portfoliotheorie vorgestellt. Gegenstand der Portfoliotheorie ist die Entscheidung eines risikoaversen Anlegers bezüglich Zusammenstellung eines Portfolios aus risikobehafteten Wertpapieren und einem risikolosen Wertpapier. Risiko wird dabei durch die Varianz der Rendite ausgedrückt. Das Capital Asset Pricing Model (CAPM) baut auf der Portfoliotheorie von Harry M. Markowitz (1952) auf. Es bestimmt die Gleichgewichtspreise, die sich am Markt einstellen, wenn risikoaverse Marktteilnehmer, entsprechend den Annahmen der Portfoliotheorie, ihre Wertschriftenportfolios zusammenstellen. Das CAPM wurde von William Sharpe, Jan Mossin und John Lintner in den 1960er-Jahren entwickelt und beantwortet folglich die Frage: «Was passiert, wenn sich alle Anleger verhalten, wie in der Mean-Variance-Analyse postuliert?»

Das CAPM ist ein Gleichgewichtsmodell, welches vielen Theorien der Modern Finance zugrunde liegt und sehr grosse Relevanz in der Praxis besitzt. Es beschreibt eine lineare Abhängigkeit zwischen der Rendite einer einzelnen Anlage und einer Risikoeinflussgrösse, der Volatilität. Mittels des Capital Asset Pricing Modells kann somit die erwartete Rendite eines Wertpapiers geschätzt werden. Die erwartete Rendite ist dabei ausschliesslich von der Sensitivität des Wertpapiers im Vergleich zum Markt (sprich vom systematischen Risiko) abhängig, was den zentralen Unterschied zur Mean-Variance-Analyse darstellt.

3.1 Grafische Herleitung der Security Market Line

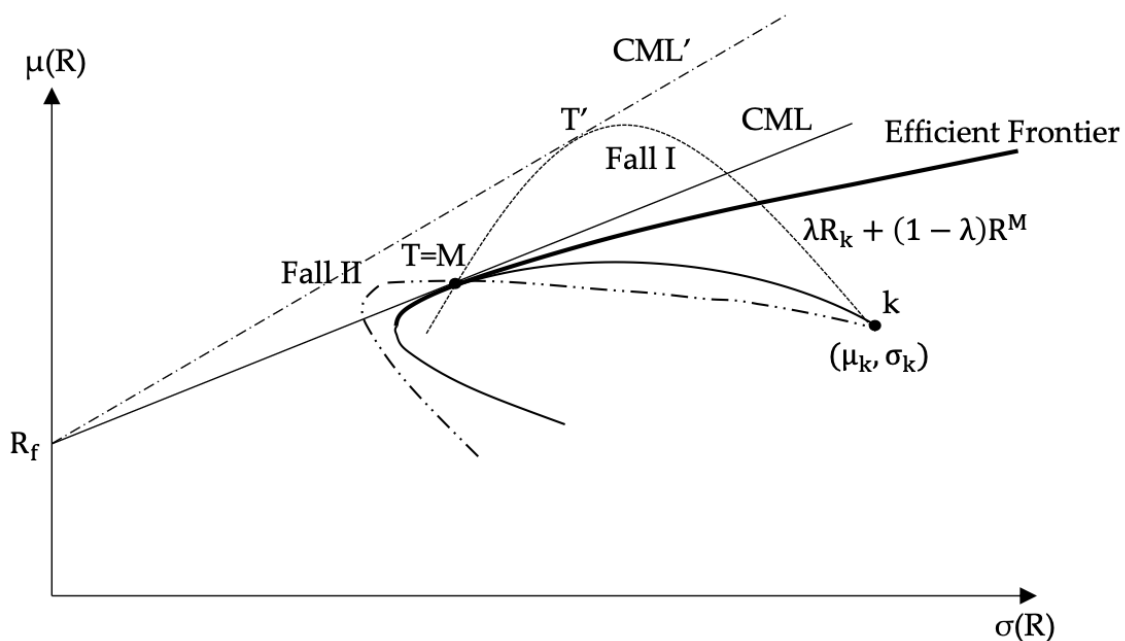
Abbildung 3.1: Grafische Herleitung der Security Market Line I



Quelle: Eigene Darstellung.

In Abbildung 3.1 ist ein Portfolio k mit (μ_k, σ_k) zu sehen. Es hängt mit dem Tangentialportfolio T , mittels der im μ - σ -Diagramm konkaven Verbindungslinie, die sich aus dem Portfolio $\lambda R_k + (1 - \lambda) \cdot R^M$ ergibt, zusammen. Je höher der Anteil $(1 - \lambda)$ ist, der ins Marktportfolio investiert wird, desto näher kommen wir an dieses in der Abbildung. Im Punkt M muss die Steigung dieser Verbindungslinie mit derjenigen der Efficient Frontier übereinstimmen. Wäre dies nicht der Fall, so würde es Portfolios geben, die effizienter als diejenigen auf der Efficient Frontier sind. Das folgende Beispiel soll diesen Zusammenhang veranschaulichen.

Abbildung 3.2: Grafische Herleitung der Security Market Line II



Quelle: Eigene Darstellung.

Abbildung 3.2 zeigt zwei Fälle auf, die zeigen sollen, dass die Steigung der Verbindungslinie der Steigung der Efficient Frontier entsprechen soll:

- *Fall I - Steigung Verbindungslinie ist grösser als Steigung Efficient Frontier:* Ist dies der Fall, so hat die Verbindungslinie einen steileren Winkel als die CML im Punkt des Tangentialportfolios. Alle Punkte auf der Verbindungslinie, die oberhalb der CML liegen, haben eine bessere Sharpe Ratio als es das Tangentialportfolio hat. Als Folge könnte eine steilere CML (CML' in der Abbildung) und somit ein neues Tangentialportfolio (T') gewählt werden. Das ursprüngliche Tangentialportfolio wurde aber so konstruiert, dass es das Portfolio mit der besten Sharpe Ratio von allen möglichen Portfolios ist. Somit ist dies ein Widerspruch.
- *Fall II - Steigung Verbindungslinie ist kleiner als Steigung Efficient Frontier:* In diesem Fall wäre die Steigung der Verbindungslinie im Punkt des Tangentialportfolios kleiner als die der CML. Links vom Tangentialportfolio wären somit alle Punkte über der CML und hätten eine bessere Sharpe Ratio. Analog zum Fall I könnte eine höhere CML gewählt werden. Dies wäre ebenfalls ein Widerspruch.

Der Zusammenhang, der in Abbildung 3.1 aufgezeigt wurde, besagt, dass die Steigung der CML der Steigung der Verbindungskurve entspricht. Somit können die Steigungen gleichgesetzt werden. Zuvor müssen die Steigungen aber noch berechnet werden.

Die Steigung der CML ist offensichtlich:

$$\frac{R_f - \mu^M}{-\sigma_M} \quad (3.1)$$

Die Steigung der Kurve von Anlage k zum Marktportfolio ergibt sich aus Anwendung des Impliziten Funktionentheorems (s.o.) wie folgt¹³ :

$$\frac{\partial \lambda \mu(\lambda \cdot R_k + (1 - \lambda) \cdot R^M) |_{\lambda=0}}{\partial \lambda \sigma(\lambda \cdot R_k + (1 - \lambda) \cdot R^M) |_{\lambda=0}} = \frac{\mu_k - \mu^M}{(Cov(R_k, R^M) - \sigma_M^2) / \sigma_M} \quad (3.2)$$

Im Punkt des Marktportfolios stimmen beide Steigungen überein. Daraus folgt:

$$\frac{(\mu_k - \mu^M) \cdot \sigma_M}{Cov(R_k, R^M) - \sigma_M^2} = \frac{\mu^M - R_f}{\sigma_M} \quad (3.3)$$

Durch Umformulieren der Gleichung erhalten wir die Gleichung für die Security Market Line [SML]:

$$\mu_k - R_f = \beta_k \cdot (\mu^M - R_f) \quad \text{wobei} \quad \beta_k = \frac{Cov(R_k, R^M)}{\sigma_M^2} \quad (3.4)$$

Über die SML lassen sich folgende Aussagen machen:

- Die Steigung der SML (Marktrisikoprämie) wird auch «Equity Premium» oder «Risiko-Prämie» genannt.
- Mehr Rendite impliziert ein höheres Beta. Das Beta, $\beta = \frac{Cov(R_k, R^M)}{\sigma_M^2}$, sagt im Wesentlichen aus, wie sehr ein Portfolio mit den Bewegungen des Marktes korreliert. Das Beta wird mit der Marktrisikoprämie multipliziert, wobei die Marktrisikoprämie die Entschädigung für das Eingehen des systematischen Risikos ist. Je mehr Risiko in Kauf genommen wird, desto mehr Rendite kann durchschnittlich erwartet werden.
- μ_k ist die geforderte Rendite der Anlage. Sie entspricht der Rendite, die notwendig ist, damit ein Investor ein Investment in dieses Wertpapier in Betracht zieht.
- Besitzt eine Anlage β_k und der Markt bewegt sich um $x\%$, dann ändert sich der Wert des Portfolios um $\beta_k \cdot x\%$.
- Das Marktportfolio hat ein Beta von 1, da die Kovarianz mit sich selbst exakt der Varianz des Marktportfolios entspricht.

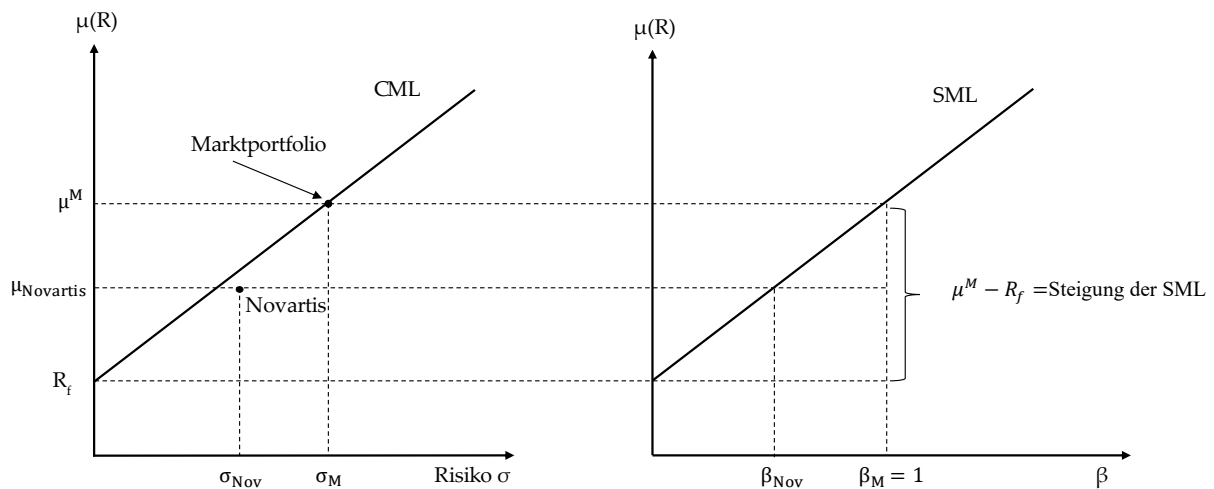
Abbildung 3.3 zeigt die Überführung der CML in die SML. Dabei wird die x-Achse neu mit β (anstatt mit σ) bezeichnet. Sowohl die CML als auch die SML zeigen den Zusammenhang zwischen Risiko und Rendite auf. Die Kapitalmarktlinie [CML] beschreibt die aus Investorensicht möglichen Kombinationen aus Risiko und Rendite, wobei der Begriff Risiko die systematische und unsystematische Komponente umfasst. Die Security Market Line [SML] zeigt die lineare Abhängigkeit der zu erwartenden Rendite einer Kapitalanlage ausschliesslich in Abhängigkeit des systematischen Risikos β auf. Die auf der SML liegenden Punkte stehen für die risikogerechten Renditeforderungen unterschiedlicher Anlagen.

Dieses Modell wird Capital Asset Pricing Model [CAPM] genannt und zeigt den positiven Zusammenhang zwischen dem systematischen Risiko (das sogenannte Beta (β)) und der durchschnittlichen Rendite einer Aktie oder eines Portfolios. Da diese Renditeforderungen (der Aktionäre) wichtige Informationen für die aus Unternehmenssicht zu berücksichtigenden

¹³ Sei $F(\mu(\lambda), \sigma(\lambda)) = const$ die Gleichung, welche die implizite Kurve der (μ, σ) beschreibt, die sich durch Variation von λ ergeben. Dann ist die Steigung $\frac{d\mu}{d\sigma} = -\frac{\frac{\partial F(\mu, \sigma)}{\partial \mu}}{\frac{\partial F(\mu, \sigma)}{\partial \sigma}} = \frac{\frac{\partial \mu(\lambda)}{\partial \lambda}}{\frac{\partial \sigma(\lambda)}{\partial \lambda}}$.

Kapitalkosten liefern, stellt die SML als Teil des CAPM einen zentralen Baustein der Corporate Finance dar.

Abbildung 3.3: Überführung der Capital Market Line [CML] in die Security Market Line [SML]



Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Volkart und Wagner (2018).

Im CAPM wird von einem Gleichgewichtszustand ausgegangen. Diese Annahme bedeutet, dass nicht effiziente Wertpapiere verkauft und gegen effiziente Wertpapiere eingetauscht werden. Wenn nun eine Aktie am Markt überbewertet wäre (zu tiefe risikogerechte Rendite im Vergleich zum relevanten Risiko, im Diagramm unterhalb der CML, SML), so würden die Nachfrage nach diesem Aktientitel einbrechen.¹⁴ Der in der Folge sinkende Aktienkurs würde die Rendite und somit die Attraktivität des betroffenen Wertpapiers wieder steigern (die Aktie bewegt sich durch den erhöhten Erwartungswert der Rendite im Diagramm nach oben). Für eine am Markt unterbewertete Aktie würden analoge umgekehrte Prozesse zu einer gleichgewichtskonformen Preisanpassung führen. In einem Gleichgewichtsmodell spielen Angebots- und Nachfrageprozesse in der Weise eine Rolle, als dass sich alle Aktienkurse gleichgewichtig einspielen, also fair bewertet werden. Diese Anpassungsprozesse führen in der Folge dazu, dass im Marktgleichgewicht alle Titel (Portfolios und Einzeltitel) effizient sind und in der langen Frist auf der SML zu liegen kommen. Abbildung 3.3 zeigt den Endzustand, nicht jedoch die Dynamik exemplarisch für das Marktportfolio wie auch eine einzelne Aktie, die Novartis Aktie, auf.

3.2 Eine wichtige Marktidentität

Als Nächstes möchten wir die SML algebraisch herleiten, da wir so die Möglichkeit bekommen, wesentliche Annahmen des CAPM wie homogene Erwartungen, keine Hintergrundrisiken und homogenes Verhalten (alle entscheiden nach Mean-Variance) aufzugeben.

Bevor wir die SML herleiten, möchten wir eine essenzielle Identität herleiten, welche wir dabei berücksichtigen müssen. Das Anteile des Marktportfolios λ_k^M ergeben sich als gewichtetes

¹⁴ Die Überbewertung bedeutet, dass der am Markt herrschende Preis zu hoch ist (d.h. dass die Aktie zu teuer ist), was wiederum einer zu tiefen risikogerechten Rendite im Vergleich zum relevanten Risiko entspricht. Die Rendite ist deshalb tiefer, da zu viel für die Aktie bezahlt wird.

Mittel der Portfolioanteile aller Investoren i , λ_k^i , (privat und institutionell), wobei die Gewichte r^i dem relativen Vermögen der Investoren entsprechen:

$$\sum_{i=1}^I \lambda_k^i r^i = \lambda_k^M \quad (3.5)$$

Diese Aussage ergibt sich wie folgt: Alle von den Investoren gehaltenen Einheiten θ_k^i entsprechen in Summe dem Gesamtangebot $\bar{\theta}_k$ des Assets k :

$$\sum_{i=1}^I \theta_k^i = \bar{\theta}_k \quad (3.6)$$

Wird diese Gleichung beidseitig mit dem Preis q_k des Assets k multipliziert, ergibt sich, dass die Summe der durch die Investoren nachgefragte Marktkapitalisierung, derjenigen des Angebots entspricht (Angebot = Nachfrage):

$$\sum_{i=1}^I q_k \theta_k^i = q_k \bar{\theta}_k \quad (3.7)$$

Schreiben wir die Nachfrage durch Assetallokation des Vermögens w^i , d.h. ersetzen wir $q_k \theta_k^i$ durch $\lambda_k^i w^i$, so ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^I \lambda_k^i w^i = q_k \bar{\theta}_k \quad (3.8)$$

Schreibt man nun nicht in absoluten, sondern in relativen Vermögen r^i , wobei $r^i = \frac{w^i}{\sum_{i=1}^I w^i}$, so erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^I \lambda_k^i r^i = \frac{q_k \bar{\theta}_k}{\sum_{i=1}^I w^i} \quad (3.9)$$

Schliesslich ist $w^i = \sum_{k=1}^K q_k \theta_k^i$ und somit ist:

$$\sum_{i=1}^I w^i = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K q_k \theta_k^i = \sum_{k=1}^K q_k \bar{\theta}_k, \text{ sodass} \quad (3.10)$$

$$\sum_{i=1}^I \lambda_k^i r^i = \frac{q_k \bar{\theta}_k}{\sum_{k=1}^K q_k \bar{\theta}_k} = \lambda_k^M \quad \text{QED}$$

3.3 Herleitung der Security Market Line

Wir beginnen nun die Herleitung der SML aus der Bedingung erster Ordnung des Portfoliooptimierungsproblems mit beliebig vielen Wertpapieren: Das allgemeine Optimierungsproblem lautet:

$$\text{Max}_{\lambda^i} (\mu_i - \mathbf{1}R_f) \lambda^i - \frac{\psi^i}{2} \lambda^{-i} \text{Cov} \cdot \lambda^i,$$

wobei λ^i das Portfolio der K Assets von Investor i ist. $\mathbf{1}$ ist ein Vektor bestehend aus K Einsen und $'$ bedeutet, dass der Vektor transponiert wird. In dem Maximierungsproblem ist die Budgetgleichung benutzt worden, um den Anteil am risikolosen Wertpapier durch die an den risikobehafteten auszudrücken: $\lambda_0^i = 1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k^i$.

Somit ist die Bedingung erster Ordnung:

$$\text{Cov} \cdot \lambda^i = \frac{1}{\psi^i} \cdot (\mu_i - R_f) \quad (3.11)$$

Wenn wir diese Gleichung mit dem Relativvermögen multiplizieren und über alle Investoren i aufsummieren, erhalten wir:

$$\text{Cov} \cdot \sum_{i=1}^I \lambda^i r^i = \left(\sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i} \right) \cdot (\mu_i - R_f) \quad (3.12)$$

Schreiben wir die Gleichung (3.12) für ein jedes Wertpapier k getrennt, so erhalten wir

$$\text{Cov} \left(R_k, \sum_{k=1}^K R_k \lambda_k^M \right) = \sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i} (\mu_i - R_f) \quad | \cdot \sum_{k=1}^K \lambda_k^M \quad (3.13)$$

$$\text{Cov} \left(\sum_{k=1}^K R_k \lambda_k^M, \sum_{k=1}^K R_k \lambda_k^M \right) = \sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i} \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k^M \cdot \mu_k - R_f \right) \quad (3.14)$$

Daraus ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i} = \frac{\sigma^2(R^M)}{\mu^M - R_f} \quad (3.15)$$

Eingesetzt in (3.13) ergibt:

$$\text{Cov}(R_k, R^M) = \frac{\sigma^2(R^M)}{\mu^M - R_f} \cdot (\mu_k - R_f) \Leftrightarrow \mu_k - R_f = \frac{\text{Cov}(R_k, R^M)}{\sigma^2(R^M)} (\mu^M - R_f) \quad (3.16)$$

Wir haben soeben die Security Market Line [SML] hergeleitet und somit die Basis für das CAPM gelegt. $\frac{\text{Cov}(R_k, R^M)}{\sigma^2(R^M)}$ entspricht dabei dem Grundbaustein β_k und definiert die Sensitivität von Asset k zum Markt. Interessant ist, dass die SML die Risikoaversion nicht enthält. D.h. die relativen Renditen der Wertpapiere (the cross-section of expected returns) ist unabhängig von der Risikoaversion. Die SML des CAPMs sagt nichts über die absolute Höhe des Marktes aus. Wenn Nestlé relativ zu Novartis richtig bewertet ist, könnten auch beide zu hoch oder zu niedrig bewertet sein, wenn der Markt insgesamt zu hoch oder zu niedrig bewertet ist.

Die Risikoaversion bestimmt aber die Überrendite des Marktes. Die Höhe der Marktrendite ergibt sich aus Gleichung (3.15) wie folgt:

$$\mu^M - R_f = \frac{\sigma^2(R^M)}{\sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i}}$$

D.h. je höher die Varianz der Marktrendite und je kleiner das (harmonische) Mittel der mit dem Relativvermögen gewichteten Risikoaversionen ist, desto höher ist die Equity Prämie.

3.4 Die CAPM Gleichung, die SML

Im Rahmen des CAPM hängt die erwartete, resp. für einen Titel geforderte Rendite $\mu(R_k)$ gemäss der SML vom Beta des Titels ab, sodass folgender Zusammenhang gilt:

$$\mu(R_k) = R_f + \beta_k(\mu^M - R_f) \quad (3.17)$$

wobei:

$\mu(R_k)$:	Erwartete Rendite der Aktie k
R_f :	Risikoloser Zinssatz
R^M :	Marktrendite
$(\mu^M - R_f)$:	Marktrisikoprämie
β_k :	Systematisches Risiko eines einzelnen Wertpapiers

Die geforderte Rendite einer Anlage $\mu(R_k)$ stellt die Summe aus der risikolosen Rendite R_f und einer Risikoprämie dar. Deren Höhe ist abhängig vom Beta-Faktor β_k (dem spezifischen Risiko des Titels) und der Marktrisikoprämie $\mu^M - R_f$ (der «Entschädigung» für das Eingehen von Marktrisiken).

3.5 Systematisches Risiko (Beta)

Das Marktrisiko Beta (β_k) spielt im CAPM eine zentrale Rolle. Da man sich als Investor des diversifizierbaren Risikos entledigen kann, interessiert uns bei der Frage nach der Entschädigung des Risikos nur noch das Marktrisiko (Beta) eines Wertpapiers. Zur Bestimmung des Betas können grundsätzlich zwei Vorgehensweisen gewählt werden: Einerseits mit der Formel für das Beta, die auch als Kovarianz-Varianz-Formel bezeichnet wird oder mittels der vollständigen Regressionsgleichung. In der Kovarianz-Varianz Formel entspricht das Beta dem Verhältnis der Kovarianz zwischen der Anlage k und dem Marktportfolio zur Varianz des Marktportfolios:

$$\beta_k = \frac{\sigma_{k,M}}{\sigma_M^2} \quad (3.18)$$

Da die Kovarianz der Multiplikation der einzelnen Standardabweichungen mit dem Korrelationskoeffizienten entspricht ($\sigma_{k,M} = \rho_{k,M}\sigma_k\sigma_M$), kann die Formel fürs Beta auch wie folgt geschrieben werden:

$$\beta_k = \frac{\sigma_k \rho_{k,M}}{\sigma_M} \quad (3.19)$$

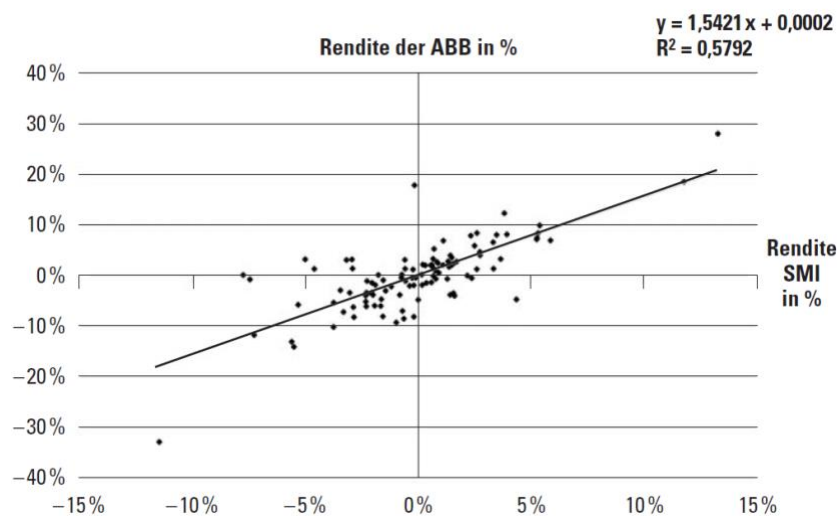
wobei:

M :	Marktportfolio
$\sigma_{k,M}$:	Kovarianz der Anlage k mit dem Marktportfolio
σ_M, σ_k :	Standardabweichungen des Marktportfolios und der Anlage k
$\rho_{k,M}$:	Korrelation der Anlage k mit dem Marktportfolio

Das Beta kann nicht nur mathematisch mit der Kovarianz-Varianz-Formel, sondern auch statistisch mittels einer Regression ermittelt werden. Die folgenden Ausführungen stammen

aus Volkart und Wagner (2018). Der Beta-Faktor entspricht dann der Steigung der Regressionsgeraden. In Abbildung 3.4 ist die Regressionsgerade für die ABB-Aktie ersichtlich. Im Diagramm stellt die Abszisse (x-Achse) die Rendite des Marktportfolios (SPI) und die Ordinate (y-Achse) die Rendite der ABB-Aktie dar. Die Renditen basieren auf Wochenrenditen (inklusive Dividenden) von Mai 2011 bis April 2013. Die Steigung der Regressionsgeraden entspricht dabei dem Beta. Ein Beta von 1 würde bei gleicher Achsenskalierung eine 45-Grad-Linie darstellen (d.h. $y = 1.0 \cdot x + \text{Achsenabschnitt}$). Aus der angegebenen Steigung der Regressionsgeraden wird ersichtlich, dass das Beta der ABB-Aktie im gegebenen Zeitraum 1.54 ist.

Abbildung 3.4: Regressionslinie für ABB bezogen auf den SPI



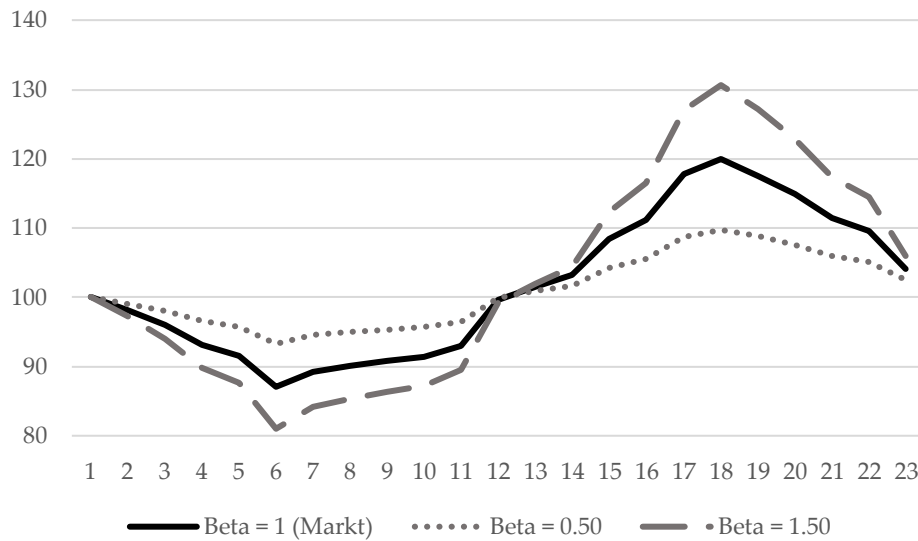
Quelle: Volkart und Wagner (2018).

Gemäss Theorie kann das Beta einen beliebig positiven bzw. negativen Wert annehmen. Empirisch ist ein Beta meist zwischen +0.5 und +1.5 üblich. Bei dem für ABB errechneten Beta handelt es sich somit eher um einen höheren Wert. Allerdings können die üblichen Werte für das Beta, abhängig von der Industrie, stark variieren.

Je stärker ein bestimmtes Wertpapier positiv mit der Marktbewegung korreliert, desto grösser ist sein systematisches Risiko. Das Beta ist somit ein Sensitivitätsmass für das systematische Risiko, welches in einem Wertpapier enthalten ist. Das Beta (β) des Marktportfolios ist definitionsgemäss gleich 1.0 (dies ist in Abbildung 3.3 auch so ersichtlich). Das Beta eines Portfolios entspricht dem gewichteten Durchschnitt der Betas jedes einzelnen Titels.

Besitzt ein Einzeltitel einen Beta-Wert von 1.0, so schwankt die Aktie so stark wie der Markt. Bewegt sich also der Markt um 1% nach oben, so macht die Aktie die genau gleiche Bewegung (+1%). Liegt der Beta-Wert unter 1, dann deutet dies auf eine geringere Schwankung als der Markt hin. Bei einem Wert von über 1 schwankt die Aktie stärker als der Markt. Risikoreichere Aktien besitzen ein $\beta > 1$ und risikoärmere ein $\beta < 1$. Dies ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Wir sehen die Bewegung des Marktes (auf 100 normiert mit einem Beta von 1.0) sowie die stärkere Schwankung eines Aktientitels mit einem Beta von 1.5 sowie die schwächere Schwankung eines Titels mit einem Beta von 0.5. Es wird ersichtlich, dass Aktien mit einem höheren Beta als 1.0 sich deutlich stärker nach oben bewegen in Boom-Phasen, dafür aber in Rezessionen unterdurchschnittlich performen.

Abbildung 3.5: Schwankungen eines defensiven und zyklischen Titels gegenüber dem Markt



Quelle: Eigene Darstellung.

Interpretation:

Interpretation eines Aktien-Betas von 1.2:

- Wenn der Gesamtmarkt um 1% steigt, dann steigt der Kurs der Aktie im Schnitt um 1.2%.
- Wenn der Gesamtmarkt um 1% sinkt, dann sinkt der Kurs der Aktie im Schnitt um 1.2%.
- Wenn der Gesamtmarkt um 5% steigt, dann steigt der Kurs der Aktie im Schnitt um 6%.
- Wenn der Gesamtmarkt um 8% sinkt, dann sinkt der Kurs der Aktie im Schnitt um 9.6%.

Tabelle 3 zeigt die Übersicht von Beta-Werten für die einzelnen SMI-Titel. Dabei kann man beobachten, dass die Betas von Titeln aus der Finanzbranche deutlich höher sind als Titel aus der Telekommunikation- oder Nahrungsmittel-Branche. Das Beta ist stets im Kontext der Unternehmenstätigkeit zu interpretieren.

Tabelle 3: Beta-Werte für SMI Titel

Unternehmen	Beta	Unternehmen	Beta
ABB	1.39	Partners Group	1.70
Alcon	0.98	Richemont	1.60
Geberit	1.52	Roche	0.70
Givaudan	0.99	Sika	1.40
Holcim	1.44	Sonova	1.46
Kuehne+Nagel	1.25	Swiss Life	1.39
Logitech	0.86	Swiss Re	1.10
Lonza	1.19	Swisscom	0.42
Nestlé	0.75	UBS	1.27
Novartis	0.92	Zurich	0.86

Quelle: Eigene Darstellung, basierend auf Daten von Datastream (Juni 2024).

3.6 Abweichung von der SML (Alpha)

Wie bereits aufgezeigt, führen Angebot und Nachfrage dazu, dass im Marktgleichgewicht alle Titel (Portfolios und Einzeltitel) effizient sind und in der langen Frist auf der SML zu liegen kommen. In der kurzen Frist kann aber eine Abweichung gegenüber der SML vorkommen. Eine Abweichung der SML wird dabei als Alpha bezeichnet und deutet auf eine Überrendite der entsprechenden Aktie hin. Kurzfristig hat die Aktie eine höhere erwartete Rendite für ihr eingegangenes Risiko, als es das CAPM postulieren würde. In Abbildung 3.6 ist zu sehen, dass Aktie E eine höhere erwartete Rendite erzielt, als es für das entsprechende Risiko der Fall wäre. Die Aktie generiert also ein positives Alpha. Für das ex-ante Alpha gilt:

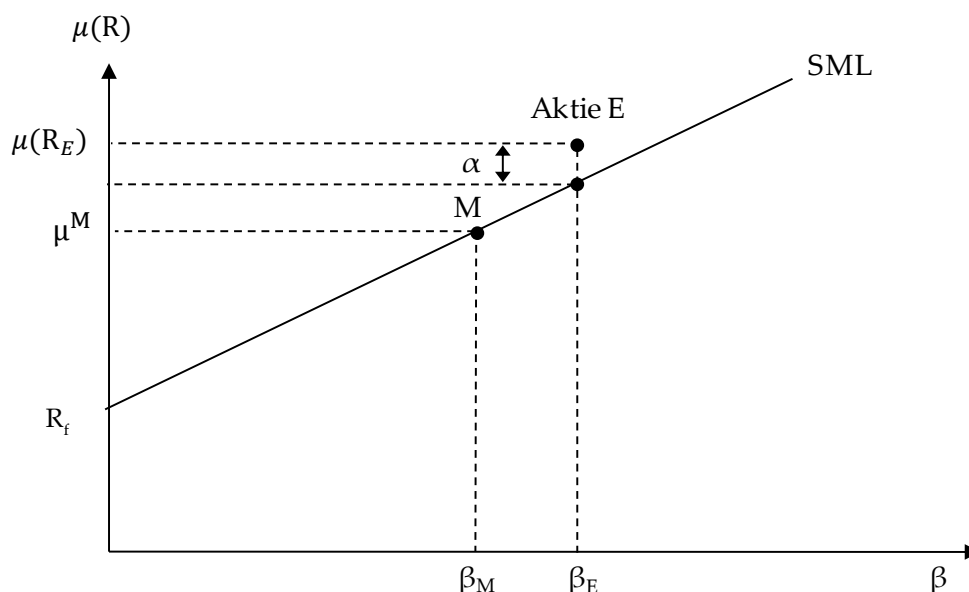
$$\alpha_k = \mu_k - (R_f + \beta_k(\mu^M - R_f)) \quad (3.20)$$

Das ex-post Alpha ist wie folgt definiert:

$$\hat{\alpha}_k = R_k - (R_f + \beta_k(R^M - R_f)) \quad (3.21)$$

Sollte man Aktien mit positivem Alpha kaufen? Falls α eine in der Vergangenheit empirisch ermittelte Überrendite ist, dann besser nicht, da wegen des oben beschriebenen Anpassungsprozesses das Alpha in der Zukunft fällt. Das heisst, ein positives empirisches Alpha bedeutet ein negatives erwartetes Alpha.

Abbildung 3.6: Abweichung von der Security Market Line (positives Alpha)



Quelle: Eigene Darstellung.

Da die SML die Regressionslinie im $\mu - \beta$ -Diagramm ist, sollten wir erwarten, dass eine gewichtete Summe der Alphas Null ergibt. In der Tat, wenn wir die Alphas gemäss der Marktkapitalisierung aufaddieren, erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k \lambda_k^M = \sum_{k=1}^K (\mu_k - R_f - \beta_k (\mu^M - R_f)) \lambda_k^M = \mu^M - \mu^M = 0 \quad (3.22)$$

Im Folgenden wird diese Aussage algebraisch hergeleitet.

3.6.1 Die Jagd nach dem Alpha ist ein Nullsummenspiel

Bevor wir die Aussage bezüglich der Alphas herleiten, beginnen wir mit einer einfacheren, aber ähnlichen Aussage: aus der Marktidentität $\sum_{i=1}^I \lambda_k^i r^i = \lambda_k^M$ und dem relativen Vermögen r^i des Investors i , welches sich wie folgt bestimmt: $r^i = \frac{w^i}{\sum_{i=1}^I w^i}$, können wir die folgende fundamentale Tatsache herleiten:

Die Marktrendite ist die durchschnittliche Rendite der Anleger. D.h. wenn ein Anleger mehr als die Marktrendite erwirtschaftet, muss ein anderer weniger als die Marktrendite haben:

$$R^M = \sum_{i=1}^I R^i r^i \quad (3.23)$$

Dies leitet man wie folgt her:

$$R^M = \sum_{k=1}^K R_k \lambda_k^M = \sum_{k=1}^K R_k \sum_{i=1}^I \lambda_k^i r^i = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K R_k \lambda_k^i r^i = \sum_{i=1}^I R^i r^i \quad (3.24)$$

Also ist die Marktrendite, die nach dem relativen Vermögen gewichtete, durchschnittliche Rendite der Anleger.

Nun können wir eine ähnliche Aussage auch für die Alphas herleiten:

Wie zuvor beschrieben, kann nicht jeder ein positives Alpha haben. Jedem positiven Alpha steht ein negatives Alpha gegenüber. Die Anzahl der Personen mit positiven und negativen Alphas ist dabei nicht entscheidend, man muss die Menge an investiertem Geld berücksichtigen. Wir wollen zeigen, dass:

$$\sum_{i=1}^I \alpha^i r^i = 0, \quad (3.25)$$

wobei α^i das Alpha des Anlegers i ist. Um das Alpha des Anlegers zu bestimmen, muss zuerst das Alpha eines Wertpapiers k definiert werden. Wie oben in Formel (3.22) erwähnt gilt:

$$\alpha_k = \mu_k - (R_f + \beta_k(\mu^M - R_f)) \quad (3.26)$$

Basierend auf dem Alpha des Wertpapiers, kann das Alpha des Anlegers nun bestimmt werden. Mit λ_k^i wird der Anteil des Vermögens von Investor i bezeichnet, der in das Wertpapier k investiert wird. Somit ist das Alpha des Investors i gegeben durch:

$$\alpha^i = \sum_{k=1}^K \lambda_k^i \alpha_k. \quad (3.27)$$

Nun soll bewiesen werden, dass die Summe aller Alphas 0 ist. Zunächst setzt man die Definition des Alphas für einen Investor in Formel (3.27) ein und erhält:

$$\sum_{i=1}^I \alpha^i r^i = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \lambda_k^i \alpha_k r^i = \sum_{k=1}^K \alpha_k \sum_{i=1}^I \lambda_k^i r^i. \quad (3.28)$$

Wie oben gezeigt, gilt die Beziehung:

$$\sum_{i=1}^I \lambda_k^i r^i = \lambda_k^M \quad (3.29)$$

Diese Aussage kann man nun in die Gleichung (3.28) einsetzen, dann folgt mit der Definition vom Alpha eines Wertpapiers:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^I \alpha^i r^i &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \sum_{i=1}^I \lambda_k^i r^i \\
&= \sum_{k=1}^K \alpha_k \lambda_k^M \\
&= \sum_{k=1}^K \lambda_k^M \left(\mu_k - (R_f + \beta_k (\mu^M - R_f)) \right) \\
&= \sum_{k=1}^K \lambda_k^M \mu_k - \sum_{k=1}^K \lambda_k^M R_f - \sum_{k=1}^K \lambda_k^M \beta_k (\mu^M - R_f) \\
&= \mu^M - R_f - \sum_{k=1}^K \lambda_k^M \frac{\text{Cov}(R_k, R^M)}{\sigma_M^2} (\mu^M - R_f)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Die Kovarianz ist bilinear und daher kann die Summe mit in die Kovarianz gezogen werden und man erhält:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^I \alpha^i r^i &= \mu^M - R_f - \sum_{k=1}^K \lambda_k^M \frac{\text{Cov}(R_k, R^M)}{\sigma_M^2} (\mu^M - R_f) \\
&= \mu^M - R_f - \frac{\text{Cov}}{\sigma_M^2} \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k^M R_k, R^M \right) (\mu^M - R_f) \\
&= \mu^M - R_f - \frac{\text{Cov}(R^M, R^M)}{\sigma_M^2} (\mu^M - R_f) \\
&= \mu^M - R_f - \mu^M + R_f \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

QED

Damit wäre bewiesen, dass die Jagd nach dem Alpha ein Nullsummenspiel ist.

3.7 Anwendung in der Praxis

Das CAPM, entwickelt durch Sharpe (1964), Lintner (1965) und Mossin (1966), basiert, wie oben erwähnt auf folgenden zentralen Annahmen:

- Investoren investieren gemäss Mean-Variance-Ansatz
- Alle Investoren haben homogene Erwartungen bezüglich künftiger Renditen
- Alle Investoren können zum risikolosen Zinssatz Geld aus- und verleihen
- Keine Hintergrundrisiken¹⁵

Zusätzlich zu diesen zentralen Annahmen sind wir davon ausgegangen, dass Kapitalmärkte vollkommen sind (es gibt keine Transaktionskosten oder Steuern), dass alle Investoren denselben Zeithorizont haben und nicht zwischendrin umschichten und natürlich, dass die Kapitalmärkte im Gleichgewicht von Angebot und Nachfrage sind.

In der Praxis sind die verschiedenen Annahmen nur bedingt erfüllt. Insbesondere die Annahmen der Vollkommenheit des Finanzmarktes sind oft nicht gegeben. Abseits der modelltheoretischen Anwendung sind dem CAPM in der Praxis deshalb Grenzen gesetzt.

¹⁵ Hintergrundrisiken sind Risiken, die nicht am Markt gehandelt werden können.

Die homogenen Erwartungen stellen eine weitere Annahme des CAPM dar. Es ist aber sehr unwahrscheinlich, dass alle Investoren die gleichen Erwartungen haben. Mehr zum CAPM mit heterogenen Erwartungen im Kapitel 4.

Die Abbildung des Marktportfolios stellt eine weitere Schwäche dar, weil dafür Proxies¹⁶ verwendet werden müssen, da die Abbildung des Marktportfolios mit allen handelbaren Wertpapieren nicht möglich ist. Ein z.B. oft verwendeter Proxy für den Aktienmarkt in der Schweiz ist der Swiss Performance Index [SPI]. Des Weiteren zeigen empirische Tests, dass die Alphas eines Wertpapiers häufig auch langfristig ungleich Null sind und daher das CAPM nicht uneingeschränkt korrekt ist.

Anomalien, wie die Low-Beta Anomalie, widersprechen den Grundlagen des CAPM. Hierbei geht es darum, dass Wertpapiere mit geringerem Beta eine höhere Rendite aufweisen, als sie aufgrund des CAPM haben sollten. Diese Beobachtung widerspricht der Theorie des CAPM, die besagt, dass man mit einem höheren Risiko auch eine dementsprechend höhere Rendite erzielen kann. Als mögliche Erklärung für solche Anomalien dienen sogenannte Hintergrundrisiken, welche in Kapitel 5 ausführlich behandelt werden.

Das CAPM ist dennoch ein durchaus viel verwendetes Modell in der Praxis und wird von Unternehmen, Beratern und Gerichten akzeptiert und angewendet. Jedoch sind viele Kritiker zu finden, die auf die aufgezeigten Anomalien und Unstimmigkeiten aufmerksam machen. Daher wurde das CAPM erweitert und Multi-Faktor-Modelle (siehe Kapitel 0), die zusätzlichen Risikofaktoren in Betracht ziehen, wurden entwickelt. Ziel dieser Multi-Faktor-Modelle ist es, die Lücken und Schwächen des CAPMs zu überwinden.

¹⁶ Ein Proxy ist in diesem Fall eine Annäherung an das tatsächliche Marktportfolio.

4 CAPM mit heterogenen Erwartungen

In Kapitel 3 wird angenommen, dass alle Investoren homogene Erwartungen haben. Dies ist offensichtlich falsch, da es in der Realität viele verschiedene Meinungen über den Verlauf der Zukunft gibt. Eine Folge der homogenen Erwartungen ist die Two-Fund-Separation, welche empirisch ebenfalls nicht beobachtet wird. In diesem Kapitel zeigen wir, wie man die SML ohne homogene Erwartungen und Two-Fund-Separation herleiten kann. Das CAPM mit heterogenen Erwartungen ist zuerst von Lintner (1969) berechnet worden. Die bislang allgemeinste Form findet sich in Gerber und Hens (2017). Dort wird ebenfalls erlaubt, dass Investoren verschiedene Kovarianzen erwarten.

4.1 Herleitung der SML unter heterogenen Erwartungen

Im Folgenden wird die SML im CAPM mit heterogenen Erwartungen hergeleitet. Es soll gezeigt werden, dass im CAPM mit heterogenen Erwartungen die Steigung der SML der Differenz aus den durchschnittlich erwarteten Renditen und dem risikolosen Zinssatz entspricht. Um dies zu zeigen, wird zuerst das Maximierungsproblem eines Investors im CAPM mit heterogenen Erwartungen definiert, welches jenem aus dem klassischen CAPM in Kapitel 3 sehr ähnlich ist. Es ist jedoch zu beachten, dass nun sämtliche Komponenten, welche zwischen Investoren variieren können, mit i indiziert sind aufgrund der Aufweichung der Annahme von homogenen Erwartungen.

Unter heterogenen Erwartungen und beliebig vielen risikobehafteten Wertpapieren sieht das Maximierungsproblem daher wie folgt aus:

$$\max_{\lambda^i} (\mu^i - R_f \mathbf{1})' \lambda^i - \frac{\psi^i}{2} \lambda^{i'} \text{Cov} \lambda^i \quad (4.1)$$

wobei ψ^i die individuelle Risikoaversion von Investor i darstellt, λ^i einen Vektor mit den Gewichtungen der jeweiligen risikobehafteten Wertpapiere und $\mathbf{1}$ einen Einheits-Vektor darstellt, der im Folgenden aus Darstellungsgründen weggelassen wird. Abgeleitet nach λ^i ergibt sich die Bedingung erster Ordnung:

$$\text{Cov} \lambda^i = \frac{1}{\psi^i} (\mu^i - R_f) \quad (4.2)$$

Die Bedingung erster Ordnung wird mit den relativen Vermögen aller Investoren multipliziert und dann über alle Investoren aufsummiert ($\sum_{i=1}^I r^i$), wodurch aufgrund der Multiplikation mit den Gewichtungsvektoren λ^i aller Investoren auf der linken Seite die Marktkapitalisierung λ^M resultiert:

$$\text{Cov } \lambda^M = \sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i} (\mu^i - R_f) \quad (4.3)$$

Die mit der Marktkapitalisierung gewichtete Varianz-Kovarianz-Matrix entspricht dabei gerade der Kovarianz der Renditen zwischen dem risikobehafteten Wertpapier k und den Marktrenditen¹⁷:

$$\text{Cov}(R_k, R^M) = \sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i} (\mu_k^i - R_f) \quad (4.4)$$

Dieser Ausdruck wird mit λ_k^M multipliziert und über alle Wertpapiere aufsummiert, wobei λ_k^M die relative Marktkapitalisierung des Assets k ist:

$$\sigma^2(R^M) = \sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i} (\mu^{i,M} - R_f) \quad (4.5)$$

Wobei:

$$\mu^{i,M} \equiv \sum_{k=1}^K \lambda_k^M \mu_k^i \quad (4.6)$$

Werden nun die Gleichungen (4.4) und (4.5) durch $\sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i}$ geteilt, resultieren folgende Zusammenhänge:

$$\frac{\text{Cov}(R_k, R^M)}{\sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i}} = \underbrace{\sum_{i=1}^I \frac{\frac{r^i}{\psi^i}}{\sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i}} (\mu_k^i - R_f)}_{= \bar{\mu}_k - R_f} \quad (4.7)$$

Bei Gleichung (4.4) ergibt dies:

$$\frac{\sigma^2(R^M)}{\sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i}} = \underbrace{\sum_{i=1}^I \frac{\frac{r^i}{\psi^i}}{\sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i}} (\mu^{i,M} - R_f)}_{= \bar{\mu}^M - R_f} \quad (4.8)$$

¹⁷ Cov stellt die Varianz-Kovarianz-Matrix der Renditen für die Wertpapiere $k = 1, \dots, K$ dar. Wird diese Matrix mit der Marktkapitalisierung der Wertpapiere multipliziert, so erhalten wir die Kovarianz zwischen dem Wertpapier k und der Marktrenditen, da dies dem mit der Marktkapitalisierung gewichteten Summenprodukt aller Kovarianzen zwischen k und allen im Markt vorhandenen Wertpapieren entspricht. Daher $\text{Cov } \lambda^M = \text{Cov}(R_k, R^M)$.

Nun kann Gleichung (4.7) durch die Gleichung (4.8) geteilt werden, wobei das Auflösen nach $\bar{\mu}^k - R_f$ folgendes ergibt:

$$\frac{\text{Cov}(R_k, R^M)}{\sigma^2(R^M)} (\bar{\mu}^M - R_f) = \bar{\mu}_k - R_f \quad (4.9)$$

Aus vorherigem Kapitel wissen wir, dass $\frac{\text{Cov}(R_k, R^M)}{\sigma^2(R^M)} = \beta_k$, weshalb schliesslich die Steigung der SML wie folgt resultiert:

$$\beta_k (\bar{\mu}^M - R_f) = \bar{\mu}_k - R_f \quad (4.10)$$

Die Security Market Line im CAPM mit heterogenen Erwartungen ist somit abhängig von der durchschnittlichen Renditeerwartung aller Investoren. Hierbei ist zu beachten, dass ein Investor den Durchschnitt stärker bestimmt, je vermögender und weniger risikoavers er ist.

4.2 Definition des Alphas

Das in Kapitel 3.6 betrachtete Alpha eines Investors war dasjenige, das sich ex-post realisiert. Mit heterogenen Erwartungen können wir nun auch ein Alpha betrachten, das die Investoren ex-ante erwarten. Wiederum zeigen wir die Nullsummeneigenschaft. Wir definieren das Alpha a^i eines Investors i als diejenige Überrendite, welche ein Investor i über derjenigen des Marktes für sich erwartet.

$$\alpha_k^i = (\mu_k^i - R_f) - \beta_k (\bar{\mu}^M - R_f) \text{ und } \alpha^i = \sum_{k=1}^K \alpha_k^i \lambda_k^M \quad (4.11)$$

Hierbei hat ein Investor i andere Erwartungen als die Investoren j : $\mu^i \neq \mu^j$. Auch für diese Definition des Alphas wollen wir zeigen, dass das Summenprodukt der gewichteten Durchschnitte a^i und der Überrenditen der Investoren α^i gleich 0 ist:

$$\sum_{i=1}^I a^i \alpha^i = 0 \quad (4.12)$$

Wobei:

$$a^i = \frac{\frac{r^i}{\psi^i}}{\sum_{j=1}^I \frac{r^j}{\psi^j}} \quad (4.13)$$

Unter Bezugnahme der Definition der Alphas erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^I a^i \sum_{k=1}^K \lambda_k^M \alpha_k^i = \sum_{i=1}^I a^i \sum_{k=1}^K \lambda_k^M \left((\mu_k^i - R_f) - \beta_k (\bar{\mu}^M - R_f) \right) \quad (4.14)$$

Und so erhalten wir mit der Definition der mittleren erwarteten Marktrenditen das, was wir zeigen wollten:

$$\sum_{i=1}^I a^i \alpha^i = (\bar{\mu}^M - R_f) - \beta^M (\bar{\mu}^M - R_f) = 0 \quad (4.15)$$

4.3 Was ist der Unterschied der beiden Definitionen des Alphas eines Investors?

Im Skript lassen sich zwei unterschiedliche Definitionen von α^i finden. Im Folgenden werden diese zwei Definitionen hergeleitet und es wird gezeigt, unter welcher Bedingung sich diese entsprechen.

Die erste Definition von α^i stammt aus der Gleichung (3.26), welche das Alpha eines Wertpapiers k bei homogenen Erwartungen beschreibt:

$$\alpha_k = \mu_k - (R_f + \beta_k (\mu^M - R_f)) \quad (4.16)$$

Setzen wir im Falle heterogener Erwartungen für $\mu_k = \sum_{i=1}^I a^i \mu_k^i$ und für $\mu^M = \sum_{i=1}^I a^i \mu^{i,M}$ ein, so kann die Gleichung (4.16) wie folgt dargestellt werden:

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^I a^i \mu_k^i - \left(R_f + \beta_k \left(\sum_{i=1}^I a^i \mu^{i,M} - R_f \right) \right) \quad (4.17)$$

Die Gleichung (4.17) kann nun in die Gleichung (3.27) eingesetzt werden und so erhalten wir eine erste Definition von α^i :

$$\begin{aligned} \alpha^i &= \sum_{k=1}^K \lambda_k^i \alpha_k = \sum_{k=1}^K \lambda_k^i \cdot \left[\sum_{i=1}^I a^i \mu_k^i - \left(R_f + \beta_k \left(\sum_{i=1}^I a^i \mu^{i,M} - R_f \right) \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^I a^i \cdot \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k^i \mu_k^i - R_f - \sum_{k=1}^K \lambda_k^i \beta_k \left(\sum_{i=1}^I a^i \mu^{i,M} - R_f \right) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{\mu}^M}$

Die zweite Definition von α^i stammt aus der Gleichung (4.11), welches das ex-ante Alpha eines Investors i für das Wertpapier k für heterogene Erwartungen beschreibt:

$$\alpha_k^i = (\mu_k^i - R_f) - \beta_k (\bar{\mu}^M - R_f) \quad (4.19)$$

$$\alpha^i = \sum_{k=1}^K \alpha_k^i \lambda_k^M \quad (4.20)$$

Nun kann die Gleichung (4.19) in die Gleichung (4.20) eingesetzt werden und so erhalten wir die zweite Definition von α^i :

$$\begin{aligned} \alpha^i &= \sum_{k=1}^K \alpha_k^i \lambda_k^M = \sum_{k=1}^K (\mu_k^i - R_f) - \beta_k (\bar{\mu}^M - R_f) \underbrace{\lambda_k^M}_{\lambda_k^i} \\ &= \sum_{i=1}^I r^i \cdot \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k^i \mu_k^i - R_f - \sum_{k=1}^K \lambda_k^i \beta_k (\bar{\mu}^M - R_f) \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Die zwei Definitionen von α^i aus den Gleichungen (4.18) und (4.21) sind identisch, falls alle Risikoaversionen gleich sind: $\psi^i = \psi, i = 1, \dots, I$. Denn dann gilt:

$$a^i = \frac{\frac{r^i}{\psi^i}}{\sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi^i}} = \frac{\frac{r^i}{\psi}}{\sum_{i=1}^I \frac{r^i}{\psi}} = r^i \quad (4.22)$$

Somit wird ersichtlich, dass die zwei Nullsummenformeln aus den Gleichungen (3.25) und (4.12), $\sum_{i=1}^I \alpha^i r^i = 0$ und $\sum_{i=1}^I \alpha^i a^i = 0$, unter der Bedingung gleicher Risikoaversionen identisch sind.

4.4 Aktiv oder passiv anlegen?

Die Tatsache, dass die Suche nach einem positiven Alpha ein Nullsummenspiel darstellt und dass gewichtet nach dem relativen Vermögen viele Investoren eine schlechtere Rendite als der Markt erzielen müssen, wirft die Frage auf, ob aktives Anlegen im Sinne eines individuellen Portfolios, welche vom Marktportfolio abweicht, lohnenswert ist. Ein aktiver Investor optimiert sein Portfolio gemäss seinen individuellen Renditeerwartungen (er hält sein individuelles Tangentialportfolio), während im Vergleich dazu ein passiver Anleger ein Portfolio hält, das die Gewichtungen des Marktes aufweist, da der passive Investor die durchschnittliche Marktmeinung aller Investoren teilt. Es ist festzuhalten, dass diese beiden Portfolios im klassischen CAPM mit homogenen Erwartungen identisch sind¹⁸. Hier ist der formale Beweis dieser Aussage.

Ein aktiver Anleger investiert gemäss seiner eigenen Markterwartungen μ^i und dadurch optimiert er das persönliche Portfolio durch die Portfoliogewichte λ^i . Dies ergibt sich aus dem Optimalitätsproblem in Gleichung (4.2), welches besagt, dass der Gewichtungsvektor λ^i eines aktiven Anlegers wie folgt aussieht:

¹⁸ Dies als direkte Konsequenz aus dem Separationstheorem von Tobin, welches besagt, dass im Gleichgewicht alle Investoren nur noch das Tangentialportfolio und einen Anteil in der risikolosen Anlage besitzen. Dadurch entspricht das Tangentialportfolio dem Marktportfolio.

$$\lambda^i = \frac{1}{\psi^i} \text{Cov}^{-1} (\mu^i - R_f \mathbf{1}) \quad (4.23)$$

Der passive Investor bildet seine Renditeerwartungen μ^i gemäss der SML, aus welcher er schliesst, dass $\mu_k^i = R_f + \beta_k^M (\bar{\mu}^M - R_f)$. Substituieren wir nun die Renditeerwartung in Formel (4.23) so resultiert:

$$\lambda^i = \frac{1}{\psi^i} \text{Cov}^{-1} (\beta_k^M (\bar{\mu}^M - R_f)) \quad (4.24)$$

Es ist bekannt, dass $\beta_k^M = \frac{\text{Cov}(R_k, R^M)}{\sigma_M^2}$. Aus Abschnitt 4.1 wissen wir zudem (siehe Fusszeile 17), dass $\text{Cov}(R_k, R^M) = \text{Cov} \lambda^M$. Somit können wir diesen Ausdruck in Formel (4.25) einsetzen und erhalten:

$$\lambda^i = \frac{1}{\psi^i} \text{Cov}^{-1} \text{Cov} \frac{\bar{\mu}^M - R_f}{\sigma_M^2} \lambda^M \quad (4.25)$$

Woraus schliesslich resultiert:

$$\lambda^i = \frac{1}{\psi^i} \left(\frac{\bar{\mu}^M - R_f}{\sigma_M^2} \right) \lambda^M \quad (4.26)$$

Da der Ausdruck $\left(\frac{\bar{\mu}^M - R_f}{\sigma_M^2} \right)$ ein Skalar darstellt, ist es ersichtlich, dass sich das risikobehaftete Portfolio eines aktiven Investors proportional zum Marktportfolio verhält, sodass es effektiv ein passives Portfolio ist.

Nun soll in diesem Abschnitt erläutert werden, unter welchen Umständen es sich lohnen kann, ein aktives Portfolio zu halten. Hierfür treffen wir die Annahme, dass ein aktives Portfolio mit Kosten C verbunden ist. Dies deshalb, weil sich aktives Management nur lohnen kann, wenn man mehr über den Markt weiss als der Durchschnitt aller Investoren. Der Besitz eines passiven Portfolios ist jedoch mit keinen Kosten verbunden, da hierfür lediglich die Marktgewichtungen der Wertpapiere bekannt sein müssen, oder ein Marktindexprodukt (ETF) gekauft werden kann.

Die Entscheidung, ob es sich für einen Investor nun trotz seinen Kosten C^i lohnt, ein aktives Portfolio zu halten, ist von seiner persönlichen Mean-Variance-Nutzenfunktion $U_{\hat{\mu}}^i(\mu^i)$ abhängig, welche in Kapitel 2 bereits eingeführt wurde. Dabei steht $U_{\hat{\mu}}^i(\mu^i)$ für den Nutzen, welcher Investor i durch die Rendite seines Portfolios erhält, welches er gemäss seinen Renditeerwartungen μ^i optimierte, während $\hat{\mu}$ die tatsächlich realisierten Renditen bezeichnet. Schreiben wir die Nutzenfunktion für einen aktiven Investor aus, so erhalten wir:

$$U_{\hat{\mu}}^i(\mu^i) = \lambda_0^i R_f + (1 - \lambda_0^i) \hat{\mu}(R \lambda^i) - \frac{\psi^i}{2} (1 - \lambda_0^i)^2 \sigma^2(R \lambda^i) - C^i \quad (4.27)$$

wobei $R \lambda^i$ für den Renditevektor steht, welcher Portfolio i generiert und C^i die Kosten, die Informationsbeschaffung bezeichnen.

Im Vergleich dazu sieht die Nutzenfunktion eines passiven Investors, welcher gemäss der durchschnittlichen Markterwartung investiert, wie folgt aus:

$$U_{\hat{\mu}}^i(\bar{\mu}) = \lambda_0^i R_f + (1 - \lambda_0^i) \hat{\mu}(R\bar{\lambda}) - \frac{\psi^i}{2} (1 - \lambda_0^i)^2 \sigma^2(R\bar{\lambda}) \quad (4.28)$$

Um zu zeigen, ob es sich lohnt, ein aktives Portfolio zu halten, betrachten wir die Differenz der Nutzenfunktion eines aktiven und eines passiven Investors. Dazu subtrahieren wir Gleichung (4.27) von Gleichung (4.28) und erhalten gemäss Gerber und Hens (2017), welche zeigen konnten, dass es sich nur lohnt, ein aktives Portfolio zu halten, wenn¹⁹:

$$U_{\hat{\mu}}^i(\mu^i) - U_{\hat{\mu}}^i(\bar{\mu}) = \frac{1}{2\psi^i} (\|\hat{\mu} - \bar{\mu}\|^2 - \|\hat{\mu} - \mu^i\|^2) \geq C^i \quad (4.29)$$

Bei welcher der beiden Funktionen der Nutzen grösser ausfällt, hängt von der Markteffizienz und vom Können des Investors ab (wie genau seine Erwartungen der Realität entsprechen). Ist ein effizienter Markt vorhanden, so gilt $\hat{\mu} = \bar{\mu}$ und es wäre unattraktiv für einen Investor, die Kosten für ein aktives Portfolio einzugehen. Ist der Markt jedoch ineffizient (es sind Überrenditen möglich: $\hat{\mu} - \bar{\mu} > 0$) und weichen die individuellen Renditeerwartungen nicht stark von der Realität ab ($\|\hat{\mu} - \mu^i\|^2$ klein), so kann es sich lohnen, ein aktives Portfolio zu halten. Abschliessend lässt sich sagen, dass man die Kosten C^i zahlen sollte, wenn:

- Der Markt ineffizient ist,
- Investor i realitätsnahe Erwartungen besitzt,
- Die Kosten C^i tief sind,
- Investor i eine tiefe Risikoaversion ψ^i besitzt.

¹⁹ Dabei steht $\|x\|^2$ für $x'COV^{-1}x$

5 Empirie des CAPM

Das CAPM ist ein Kapitalmarktgleichgewichtsmodell, welches die erwartete Rendite eines Wertpapiers (beispielsweise die erwartete Rendite einer Aktie) durch die drei Parameter risikolosen Zinssatz, erwartete Marktrendite und den Beta-Faktor bestimmt. Man sagt, das CAPM ist ein Modell, das die Cross Section der Aktienrenditen erklärt. Die SML beschreibt eine lineare Abhängigkeit der erwarteten Rendite einer Aktie von genau einer Einflussgrösse, dem Beta Faktor. Somit gehört das CAPM zur Gruppe der Ein-Faktor-Modelle. Durch die spätere Schaffung von Multi-Faktor-Modellen der Arbitrage Pricing Theory und im Rahmen der modernen Finance wurde versucht, die Schwächen des CAPM zu adressieren. Bei Multi-Faktor-Modellen werden die erwarteten Renditen nicht nur von einem einzelnen Faktor (wie dem Beta-Faktor im CAPM), sondern von einer Vielzahl an Faktoren determiniert. Einzelne dieser Erweiterungen werden im nachfolgenden Kapitel detaillierter betrachtet. Jedoch gibt es für die Multi-Faktor-Modelle keine ökonomische Fundierung wie bei der Mean-Variance-Analyse oder dem CAPM.

Am Ende des Kapitels wird das CAPM zudem kritisch in Bezug auf die Auswahl des Marktportfolios und diverser auftretender Anomalien betrachtet und weitere Denkanstösse gegeben.

5.1 Einführung in die Multi-Faktor-Modelle

Die Grundidee von Ein-Faktor-Modellen ist es, dass eine Variable lediglich von einem Faktor abhängig ist. Vorteil eines solchen Modells ist es, dass die Anzahl der Inputparameter auf ein Minimum begrenzt wird und eine vereinfachte Handhabung resultiert. Das CAPM ist eine sehr prominente Anwendung eines Ein-Faktor-Modells. Die erwartete Rendite ist dabei ausschliesslich von der Sensitivität des Wertpapiers im Vergleich zum Markt abhängig.

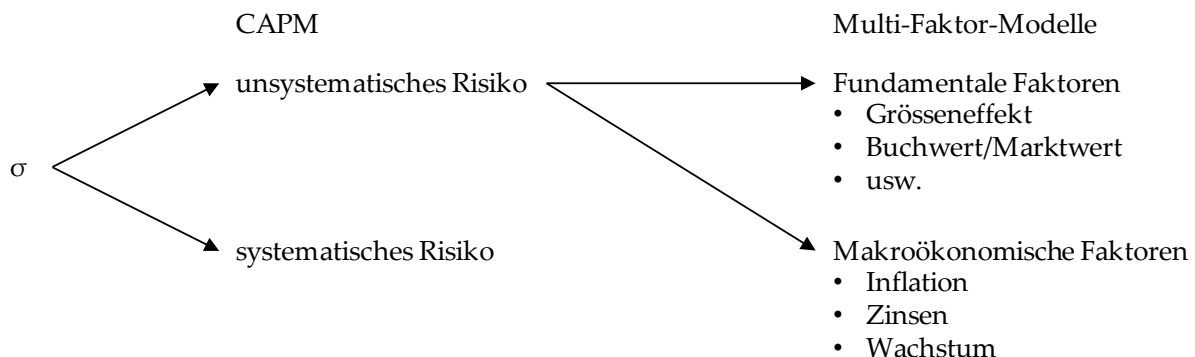
Wie wir bei der APT gesehen haben, kann die erwartete Rendite aber auch über ein Multi-Faktor-Modell bestimmt werden, welches verschiedene Risikofaktoren wie zum Beispiel makroökonomische Faktoren wie die Inflation, das Zinsniveau oder die Wachstumsrate des Bruttoinlandprodukts verwendet. Die Aufteilung in mehrere Faktoren erlaubt es, die Sensitivität von unterschiedlichen Wertpapieren zu den einzelnen Faktoren besser zu berechnen. Somit findet im Vergleich zum Ein-Faktor-Modell eine Verfeinerung der Rendite- und Risikoanalyse statt, da mehrere Risikofaktoren für die Beschreibung der erwarteten Rendite eingesetzt werden.

Grundsätzlich lassen sich Multi-Faktor-Modelle unter anderem in die folgenden zwei Kategorien einteilen:

- **Fundamentale Faktor-Modelle:** Solche Modelle erklären die erwartete Rendite von Wertpapieren anhand fundamentaler Eigenschaften von Unternehmen wie beispielsweise Buchwert-Marktwert-Verhältnis, Marktkapitalisierung oder dem Kurs-Gewinn-Verhältnis.
- **Makroökonomische Faktor-Modelle:** Solche Modelle erklären die erwartete Rendite von Wertpapieren anhand makroökonomischer Variablen / Einflussfaktoren wie beispielsweise dem Zinsniveau, Inflation, Energiepreise, volkswirtschaftliches Wachstum oder Konjunkturzyklus.

Abbildung 5.1 zeigt die Überleitung des CAPM in die Multi-Faktor-Modelle, indem das unsystematische Risiko durch verschiedene einzelne fundamentale oder makroökonomische Faktoren ersetzt werden kann.

Abbildung 5.1: Aufspaltung des Risikos im CAPM und in Multi-Faktor-Modellen



Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an Volkart und Wagner (2018).

5.1.1 Arbitrage Pricing Theory

Bei der Arbitrage Pricing Theory (APT) handelt es sich um einen generell formulierten Modellansatz, bei welchem mehrere Risikofaktoren verwendet werden. Sie fungiert als Basis für nachfolgende explizite Multi-Faktor-Modelle wie zum Beispiel dem Fama-French Modell. Im Rahmen der APT werden alle Faktoren gesucht, welche die Rendite eines Wertpapiers beeinflussen. Somit ist es nicht mehr notwendig, ein konkretes Marktportfolio zu bestimmen, jedes gut diversifizierte Portfolio kann als Benchmark genommen werden. Die APT geht folglich davon aus, dass Wertpapierrenditen mit einem Faktormodell beschrieben werden können, dass das diversifizierbare Risiko eliminiert werden kann und Arbitragemöglichkeiten sofort ausgenutzt werden und somit verschwinden. Der im CAPM noch «eindimensionale» Beta-Faktor wird nun um verschiedene Risikofaktoren erweitert. Somit kann die erwartete Risikoprämie eines Wertpapiers wie folgt geschrieben werden:

$$\mu(RP_k) = \mu(R_k) - R_f = \beta_1(R_{Faktor\ 1} - R_f) + \beta_2(R_{Faktor\ 2} - R_f) + \dots + \beta_n(R_{Faktor\ n} - R_f) \quad (5.1)$$

wobei:

$\mu(RP_k)$: Erwartete Risikoprämie des Wertpapiers k , entspricht der erwarteten Rendite des Wertpapiers abzüglich des risikolosen Zinssatzes

$\mu(R_k)$: Erwartete Rendite des Wertpapiers k

β_n : Sensitivität des Wertpapiers bezüglich des entsprechenden Faktors

$R_{Faktor\ n} - R_f$: Risikoprämie des jeweiligen Faktors gegenüber dem risikolosen Zinssatz

Die APT fordert als Basis-Theorie nun dazu auf, konkrete Risikofaktoren zu verwenden. Hierzu wird im nachfolgenden Kapitel das Drei-Faktor-Modell von Fama-French betrachtet.

5.2 Fama-French Modell

Wie bereits durch die Arbitrage Pricing Theory begründet, ist anhand von Multi-Faktor-Modellen die Addition von verschiedensten Faktoren zur Berechnung der erwarteten Risikoprämie oder der erwarteten Rendite möglich. Ein in der Finance Literatur berühmtes Multi-Faktor-Modell ist das Fama-French Modell, welches eine empirische Weiterentwicklung des CAPM darstellt. Eugene Fama und Kenneth French (1996) argumentieren dabei, dass das CAPM die Aktienrenditen der Unternehmen nur unzureichend zu erfassen vermag. Gemäss ihren Analysen und jahrelanger Forschung am amerikanischen Aktienmarkt haben zwei fundamentale Faktoren signifikanten Einfluss auf die jeweiligen Renditen: die Firmengrösse sowie das Buchwert-Marktwert-Verhältnis des Eigenkapitals. Die Firmengrösse wird auch als Grösseneffekt (Size-Effekt) bezeichnet und der Einfluss von Buch- und Marktwerten wird auch als Value-Effekt bezeichnet. Diese drei Faktoren, sprich inklusive der Marktrisikoprämie aus dem CAPM, definieren das Drei-Faktor-Modell gemäss Fama und French.

Die erwartete Rendite des Wertpapiers ist nach dem Fama-French-Modell wie folgt definiert:

$$\mu(R_k) = R_f + \beta_k^M [R^M - R_f] + \beta_{k,SMB} SMB + \beta_{k,HML} HML \quad (5.2)$$

wobei:

$\mu(R_k)$:	Erwartete Rendite des Wertpapiers k
$R^M - R_f$:	Marktrisikoprämie (wie im CAPM)
SMB :	Small Minus Big (Rendite-Spread zwischen Small Caps und Large Caps), Size-Prämie
HML :	High Minus Low (Differenz zwischen Aktien mit hohem Buchwert-Marktwert-Verhältnis und Aktien mit tiefem Buchwert-Marktwert-Verhältnis), Value-Prämie

Die Size-Prämie, also die überdurchschnittliche Rendite von Unternehmen mit einer geringen Marktkapitalisierung, entsteht als Kompensation für das eingegangene Risiko. Fama und French argumentieren, dass kleine Unternehmen oftmals von wenigen Produkten abhängen, wodurch es für sie im Vergleich zu Unternehmen mit einer grossen Marktkapitalisierung schwieriger fällt, Risiko zu diversifizieren. Somit neigen Unternehmen mit einer geringen Marktkapitalisierung eher dazu in finanzielle Schwierigkeiten zu gelangen. Unternehmen mit einem hohen HML-Quotienten werden oftmals als Value-Aktien und solche mit einem tiefen HML-Quotienten als Growth oder Wachstums-Aktien bezeichnet.

5.2.1 Erweiterung des Fama-French Modell

Eine Schwachstelle des Fama-French Modells ist seine Unfähigkeit zur Erklärung des Momentum-Effekts. Diesem Umstand wurde im sogenannten Carhart Modell von Mark Carhart aus dem Jahr 1997 Rechnung getragen. Das Drei-Faktor-Modell von Eugene Fama und Kenneth French wird dabei um den sogenannten Momentum-Faktor (UMD – Up Minus Down) auf ein Vierfaktormodell erweitert. Als Momentum Strategie bezeichnet man eine Anlagestrategie, bei der ein Investor davon ausgeht, dass Wertpapiere welche aktuell zum Zeitpunkt t oder im vergangenen Zeitpunkt $t - 1$ eine gute Rendite erzielt haben, auch in der Zukunft $t + 1$ weiterhin eine gute Rendite erzielen werden.

Die erwartete Rendite eines Wertpapiers ist nach dem Carhart-Modell wie folgt definiert:

$$\mu(R_k) = R_f + \beta_k^M [R^M - R_f] + \beta_{k,SMB} SMB + \beta_{k,HML} HML + \beta_{k,UMD} UMD \quad (5.3)$$

wobei:

UMD: Überrendite von Wertpapieren mit hoher Rendite im letzten Zeitraum gegenüber Wertpapieren mit tiefer Rendite im letzten Zeitraum

5.3 Empirie und Anomalien

Das CAPM sowie weitere Ein- oder Multi-Faktor-Modelle unterliegen zahlreichen Annahmen, welche deren Modellierung vereinfachen. Aus diesem Grund ist eine kritische Betrachtung der Modelle notwendig.

Erste Kritiken an das CAPM wurden unter anderem von Richard Roll (1977) thematisiert. Er kritisierte die Tatsache, dass das im CAPM verlangte Marktportfolio in der Praxis nicht vorhanden sei und somit ein Proxy verwendet werden muss, da die Abbildung des Marktportfolios mit allen möglichen handelbaren Wertpapieren nicht möglich ist.

Ein weiteres Problem ist die Tatsache, dass das Modell in Erwartungen konzipiert ist, die verwendeten Daten jedoch schliesslich Realisierungen und keine Erwartungen darstellen. Dieses Problem ist äquivalent zur Annahme der rationalen Erwartungen. Weitere empirische Studien zum CAPM zeigen zudem unerwartete, sprich nicht durch den Beta-Faktor erklärbare Einflüsse auf die Wertpapierrenditen, sogenannte Anomalien.

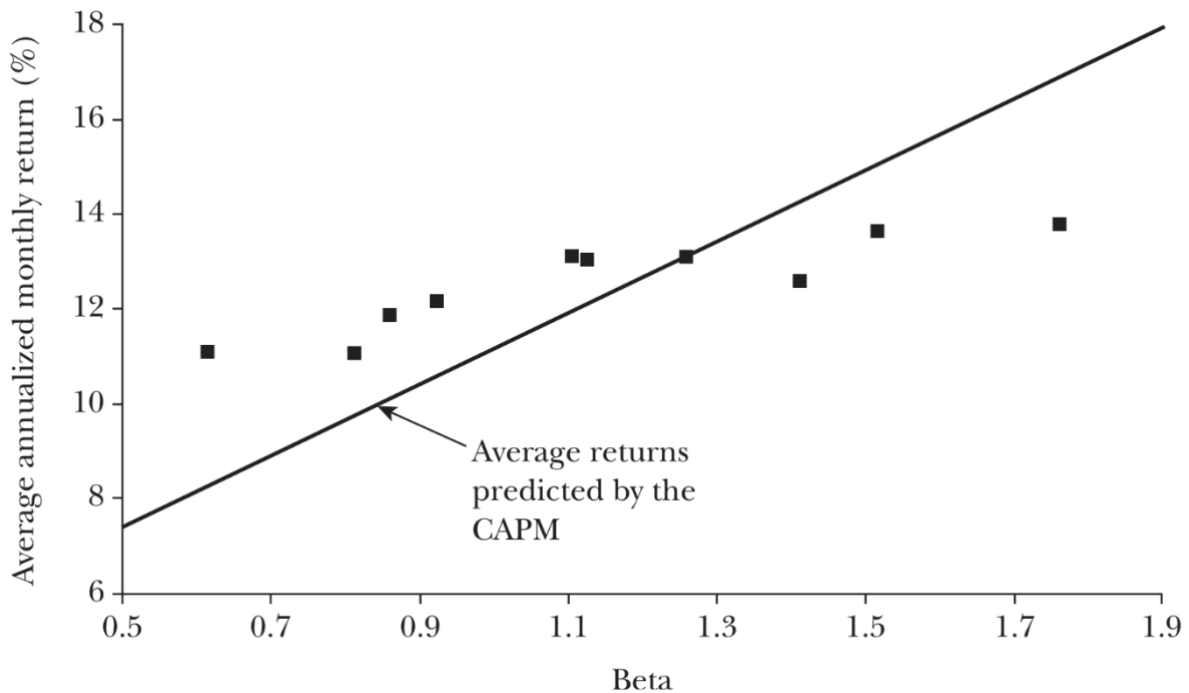
Diese Anomalien können laut Shleifer und Vishny (1997) nur auftreten, wenn der Arbitrage Prozess nicht oder nur teilweise funktioniert. Das Arbitrage Argument wird in der Finance vielfach angewandt und beschreibt das Handeln in ineffizienten Märkten, an welchen Investoren eine risikolose Rendite ohne den Einsatz von Kapital erzielen können. Dieses Argument besagt, dass ein Arbitrageur eine solche Situation an Finanzmärkten sofort ausnutzen würde und somit durch sein Handeln, die Preise wieder den fairen Werten entsprechen. Shleifer und Vishny (1997) argumentieren nun, wie zuvor erwähnt, dass Anomalien nur dann auftreten können, wenn dieser Arbitrage Prozess nicht oder nur teilweise funktioniert. Sie begründen dies dadurch, dass solche Arbitrage Trades in der Realität oftmals äusserst riskant sind, einen grossen Kapitalaufwand voraussetzen und nur von wenigen professionellen Investoren ausgeführt werden. Zudem verwenden solche professionellen Arbitrageure oftmals das Kapital von Investoren und sind somit zusätzlich der Principal-Agent-Problematik ausgesetzt.

Im Folgenden werden jeweils die bekanntesten Anomalien näher erläutert.

5.3.1 Low-Volatility Anomalie

Die Low-Volatility Anomalie, bspw. durch Baker, Bradley und Wurgler (2011) untersucht, (auch bezeichnet als Low-Beta oder Low-Risk Effekt) besagt, dass Aktien mit einem tieferen Beta im Durchschnitt höhere Renditen erzielen als Aktien mit einem hohen Beta. Dies ist somit nicht vereinbar mit der Theorie der effizienten Märkte, in denen ein Investor eine höhere Rendite nur durch ein gleichzeitig höheres Risiko erzielen kann.

Abbildung 5.2: Average Annualized Monthly Return versus Beta for Value Weight Portfolios Formed on Prior Beta, 1928–2003



Quelle: Fama & French (2004).

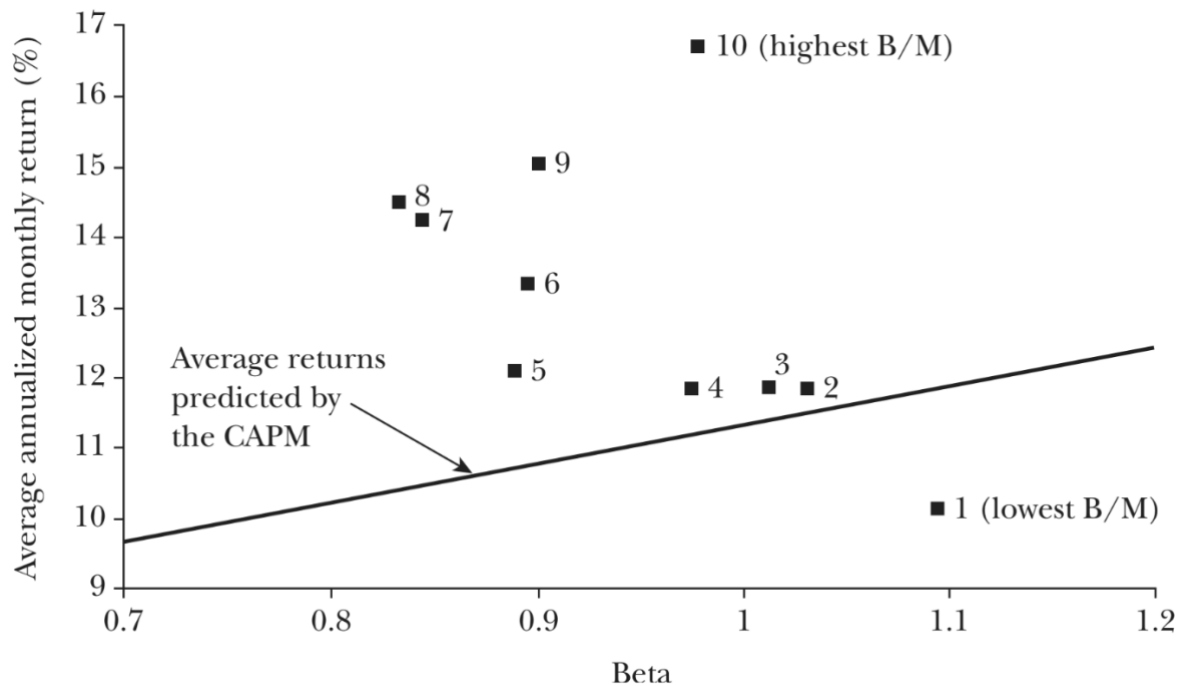
Für diese empirisch dokumentierte Anomalie existieren mehrere Erklärungsversuche. Eine erste Erklärung kann durch das Carhart Modell gegeben werden. Auf Basis von diesem Vier-Faktor-Modell kann argumentiert werden, dass die statistisch signifikante Outperformance von Low-Beta Portfolios durch die Faktoren SMB, HML und UMD erklärt werden kann. Dies wurde jedoch zum Beispiel durch Ang et al (2006) widerlegt, welche suggerieren, dass die Outperformance nicht erklärt werden kann durch die Faktoren des Carhart Modells.

Eine weitere mögliche Erklärung für die Low-Volatility ist, dass wegen Kreditbeschränkungen Investoren, die hohe Renditen möchten, High Beta Aktien kaufen. Damit ist deren Preis zu hoch und die Rendite zu gering. Eine Studie von Frazzini und Pedersen (2014) belegt, dass High Beta Assets tiefere Alphas und Sharpe Ratios liefern, was in einer flacheren SML, als vom CAPM vorausgesagt, resultiert.

5.3.2 Value Anomalie

Die Value Anomalie besagt, dass sogenannte Value-Aktien (Aktien von Unternehmen mit einem hohen HML-Quotienten) im Durchschnitt eine höhere Rendite erzielen als Wachstums-Aktien (Aktien von Unternehmen mit einem tiefen HML-Quotienten). Diese signifikante Outperformance wurde bereits 1934 durch Benjamin Graham und David LeFevre Dodd aufgezeigt und später im Drei-Faktor-Modell von Fama und French erneut aufgegriffen.

Abbildung 5.3: Average Annualized Monthly Return versus Beta for Value Weight Portfolios Formed on B/M, 1963–2003



Quelle: Fama & French (2004).

Auch für diese Anomalie existieren mehrere Erklärungsversuche. Es existieren unter anderem eine Reihe von rationalen Erklärungen. Diese Begründungen führen die Value Anomalie auf Risikofaktoren wie Unternehmensnotstand, Illiquidität oder Konjunktursensitivität zurück.

Erklärungen, welche sich auf die Behavioral Finance stützen, argumentieren, dass menschliche kognitive Verzerrungen zu Fehlpreisen führen. Investoren neigen also dazu, die zukünftige Entwicklung von Wachstums-Aktien deutlich zu überschätzen und diejenige von Value-Aktien deutlich zu unterschätzen.

5.3.3 Size Anomalie

Die Size Anomalie (auch Small Firm Effect genannt) besagt, dass Aktien von Unternehmen mit einer geringeren Marktkapitalisierung im Durchschnitt eine höhere Rendite erzielen als Aktien von Unternehmen mit einer hohen Marktkapitalisierung. Dieser Effekt tritt jedoch nicht linear mit der Grösse eines betrachteten Unternehmens auf, sondern gilt oftmals nur für kleine Unternehmen. Auch diese Outperformance wurde durch Fama und French in ihrem Drei-Faktor-Modell aufgegriffen.

Erklärungsversuche für diese Anomalie beziehen sich darauf, dass kleine Unternehmen zum einen ein grösseres Wachstumspotenzial besitzen und sich zum anderen oftmals in einem volatileren Geschäftsumfeld befinden als grosse Unternehmen und es dadurch zu einer höheren Rendite kommt. Ausserdem sind die Liquiditäts- und Ambiguitätsprämien Gründe für die Size-Anomalie. Die Liquiditätsprämie ergibt sich daraus, dass Aktien kleinerer Unternehmen (Small Caps) oft schwieriger zu handeln sind (weniger liquide) und Investoren eine Prämie dafür fordern. Für Small Cap Unternehmen gibt es ebenfalls weniger Research, was dazu führt, dass Investoren eine Prämie für die fehlenden Informationen fordern.

5.3.4 Momentum Anomalie

Die Momentum Anomalie bezeichnet die Tatsache, dass ein Investor mit einer Anlagestrategie, bei der er davon ausgeht, dass Wertpapiere, welche aktuell zum Zeitpunkt t oder im vergangenen Zeitpunkt $t - 1$ eine gute Rendite erzielt haben, dies auch in Zukunft schaffen werden. Man kann also von einem gewissen Trending der Aktien ausgehen.

Bei dieser Anomalie handelt es sich um eine der grössten Herausforderungen der Theorie der effizienten Märkte. Ursprünglich von Jegadeesh und Titman (1993) bei der Analyse von Investment-Strategien beobachtet und dokumentiert, ist dieser Effekt heutzutage in nahezu allen grossen Märkten über lange Zeiträume hinweg belegt.

Erklärungsversuche verwenden erneut die Theorie der Behavioral Finance. Hierbei kann argumentiert werden, dass die Momentum Anomalie durch Herdenverhalten der Investoren auftritt, neigen folglich einige Investoren dazu, eine Aktie zu kaufen, so folgen ihnen unzählige weitere, sodass die Kurse im Anschluss steigen.

Bislang haben wir aus vier Grundannahmen das CAPM hergeleitet und dann gesehen, dass die wesentliche Schlussfolgerung, die SML, empirisch nicht gilt. Dann haben wir Literatur zitiert, die diese Anomalien mit Argumenten erklären, die weder formal modelliert wurden noch ins CAPM passen. Deshalb liegt es nahe, die Anomalien innerhalb des CAPM durch Erweiterung der Grundannahmen zu erklären.

Während das Einfaktormodell, CAPM, eine klare theoretische Fundierung hat, sind die Mehrfaktormodelle empirisch motiviert. Aus welchen Entscheidungsmodellen sie hergeleitet werden können ist unklar. In den folgenden Kapiteln wird gezeigt, wie einfache Erweiterungen des CAPMs manche der Faktoren erklären können.

6 CAPM mit Hintergrundrisiken

Schauen wir noch einmal auf die vier Grundannahmen, so sehen wir, dass die Annahme der Möglichkeit Geld risikolos anzulegen (Cash-Konto) realistisch ist. Davon abzuweichen, wäre unrealistisch. Die Annahme homogener Erwartungen ist jedoch vollkommen unrealistisch. Ihre Aufgabe änderte aber nichts an der Empirie der SML. Also betrachten wir nun die beiden verbleibenden Grundannahmen.

Eine der grundlegenden Annahmen des CAPM ist, dass alle Risiken am Markt handelbar sind. In diesem Kapitel möchten wir nun zwischen Marktrisiken und Hintergrundrisiken unterscheiden. Hintergrundrisiken sind Risiken, die nicht am Markt handelbar sind. Diese Hintergrundrisiken haben einen Einfluss auf die Herleitung des CAPM, welche wir nun betrachten. In einem ersten Schritt leiten wir das CAPM mit Hintergrundrisiken her. Zusätzlich werden wir aufzeigen, dass man gewisse Markt-Anomalien, wie zum Beispiel die Low Beta Anomalie oder die Value Prämie mit Hintergrundrisiken im CAPM mit Hintergrundrisiken erklären kann.

6.1 Annahmen

Wir gehen von einer Ökonomie mit Hintergrundrisiken aus. Wir bezeichnen alle Risiken mit $s = 1, \dots, S$. Von diesen S Risiken sind insgesamt $k = 1, \dots, K$ handelbar und $k = K + 1, \dots, K + J$ nicht handelbar, wobei $K+J = S$. Die Vermögensanteile, die ein Investor in die Assets investiert, bezeichnen wir wie bisher mit λ_0 für das Asset $k = 0$, $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ für die Assets 1 bis K und $\lambda_{K+1}, \dots, \lambda_{K+J}$ für die Assets $K + 1$ bis $K + J$.

Wir definieren nun eine Rendite-Matrix, welche gegeben ist als:

$$s = 1 \begin{bmatrix} R_f & R_{1,1} & \cdots & R_{1,K} & R_{1,K+1} & \cdots & R_{1,K+J} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s = S \end{bmatrix} = R \quad (6.1)$$

Wie können wir diese Rendite-Matrix nun interpretieren? Die Matrix besteht aus den Renditen aller Assets, d.h. den handelbaren Assets $1, \dots, K$ und den nicht handelbaren Assets $K + 1, \dots, K + J$. Zudem definieren wir einen Vektor mit dem risk free Asset, welche für unsere CAPM Herleitung zwingend notwendig ist. Diese Rendite-Matrix entspricht nun unserem gesamten «Anlageuniversum», welches wir vereinfacht mit R abkürzen.

Um ein Maximierungsproblem mit den definierten Hintergrundrisiken aufstellen zu können, müssen wir nun einige Terme definieren, um die nachfolgende Optimierung ein wenig übersichtlicher zu gestalten:

- Die Anteile $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ in den **handelbaren Assets** fassen wir als λ_x zusammen.
- Der Anteil in den **nicht handelbaren Assets** $\lambda_{K+1}, \dots, \lambda_{K+J}$ bezeichnen wir als λ_y .
- Die Investoren verfügen über ein **Anfangsvermögen**, welches wir als w^i bezeichnen, sowie über die **Hintergrundrisiken** λ_y^i .

6.2 Maximierungsproblem

Nun sind wir in der Lage, das Maximierungsproblem mit Hintergrundrisiken aufzustellen. Wir gehen analog zum bereits bekannten Maximierungsproblem vor, allerdings müssen wir nun die Hintergrundrisiken der Investoren mitberücksichtigen.

Die Investoren verfügen über homogene Erwartungen (Kapitel 2) und maximieren die folgende Nutzenfunktion:

$$\max_{\lambda_x^i} \mu_{PF} - \frac{\psi^i}{2} \sigma_{PF}^2, \text{ sodass } \sum_{k=0}^K \lambda_k^i = 1 \quad (6.2)$$

Es stellt sich die Frage, aus welchen Komponenten sich dieses Maximierungsproblem zusammensetzt: Wir maximieren den Nutzen, d.h. die Rendite eines Investors i über alle handelbaren Assets λ_x , in welcher die Risikoaversion als negativer Term in die Berechnung einfließt. Der Nutzen ist wiederum abhängig ist vom Risiko (d.h. der Varianz). Die Summe über alle Vermögensteile, die investiert werden, muss sich korrekterweise auf 1 (100%) aufsummieren.

Um das Optimierungsproblem aufstellen zu können, müssen wir nun noch eine Kovarianzmatrix der Renditematrix R definieren. Wir definieren die Kovarianzmatrix wie folgt:

$$Cov = \begin{bmatrix} Cov_{xx} & Cov_{xy} \\ Cov_{yx} & Cov_{yy} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Die Kovarianzmatrix R besteht somit aus den Varianzen aus den handelbaren Asset Cov_{xx} und nicht handelbaren Assets Cov_{yy} und den jeweiligen Kovarianzen zusammen, welche sich gegenseitig entsprechen, d.h. $Cov_{yx} = Cov_{xy}$.

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $J = K$. Das heisst es gibt gleich viele handelbare, wie nicht handelbare Risiken. Dies stellt eine technische Annahme dar, um die Herleitung des CAPM mit Hintergrundrisiken zu vereinfachen.

Wir können zunächst die Rendite μ_{PF} und das Risiko σ_{PF}^2 wie folgt ausformulieren:

$$\mu_{PF} = R_f + (\mu_x - R_f) \lambda_x^i + \mu_y \lambda_y^i \quad (6.4)$$

$$\sigma_{PF}^2 = \lambda_x^{i'} Cov_{xx} \lambda_x^i + 2(\lambda_x^{i'} Cov_{xy} \lambda_y^i) + \lambda_y^{i'} Cov_{yy} \lambda_y^i \quad (6.5)$$

Wir erkennen nun sehr gut, dass das Hintergrundrisiko einen Einfluss auf die Rendite und das Risiko hat, da nun einerseits die Kovarianz mit den handelbaren Risiken berücksichtigt wird, sowie die Varianz der nicht handelbaren Risiken einen Einfluss auf die Berechnung haben kann.

Um das Optimierungsproblem ein wenig weiter zu vereinfachen, werden wir nun alle konstanten Terme, welche bei der Bedingung erster Ordnung ohnehin wegfallen würden, ignorieren. Ohne die Optimierung der irrelevanten konstanten Terme lautet das Maximierungsproblem nun wie folgt:

$$\max_{\lambda_x^i} (\mu_x - R_f) \lambda_x^i - \frac{\psi^i}{2} (\lambda_x^{i'} \text{Cov}_{xx} \lambda_x^i + 2(\lambda_x^{i'} \text{Cov}_{xy} \lambda_y^i)) \quad (6.6)$$

Wir erinnern uns an das vorhin aufgestellte Optimierungsproblem mit:

$$\max_{\lambda_x^i} \mu_{PF} - \frac{\psi^i}{2} \sigma_{PF}^2 \quad (6.7)$$

Um die oben erwähnten Variablen μ_{PF} und σ_{PF}^2 zu verknüpfen müssen wir folgende Schritte berücksichtigen:

$$\mu_{PF} = (\mu_x - R_f) \lambda_x^i \quad (6.8)$$

$$\sigma_{PF}^2 = \lambda_x^{i'} \text{Cov}_{xx} \lambda_x^i + 2(\lambda_x^{i'} \text{Cov}_{xy} \lambda_y^i) \quad (6.9)$$

Die Bedingung erster Ordnung ist nun wie folgt gegeben:

$$\mu_x - R_f = \psi^i (\text{Cov}_{xx} \lambda_x^i + \text{Cov}_{xy} \lambda_y^i) \quad | \cdot \sum_i \frac{r^i}{\psi^i} \quad (6.10)$$

$$\sum_i \frac{r^i}{\psi^i} (\mu_x - R_f) = \text{Cov}_{xx} \sum_i r^i \lambda_x^i + \text{Cov}_{xy} \sum_i r^i \lambda_y^i \quad (6.11)$$

$$\sum_i \frac{r^i}{\psi^i} (\mu_x - R_f) = \text{Cov}_{xx} \lambda_x^M + \text{Cov}_{xy} \lambda_y \quad | \cdot \lambda^M \quad (6.12)$$

$$\sum_i \frac{r^i}{\psi^i} (\mu^M - R_f) = \sigma^2(R^M) + \text{Cov}(R^M, R_y) \quad (6.13)$$

Wir kombinieren die Gleichungen (6.12) und (6.13) und erhalten den folgenden Ausdruck:

$$\mu_x^k - R_f = (\mu^M - R_f) \frac{\text{Cov}(R_k, R^M) + \text{Cov}(R_k, R_y)}{\sigma^2(R^M) + \text{Cov}(R^M, R_y)} \quad (6.14)$$

Wir erkennen, dass sich dieser Ausdruck von der uns bereits bekannten SML-Gleichung unterscheidet: Das heisst, dass die erwartete Rendite nun von der Kovarianz zwischen Assets und Hintergrundrisiken abhängt, d.h. $\text{Cov}(R_k, R_y)$, sowie von der Kovarianz des Marktes und der Hintergrundrisiken.

Dabei gilt, dass die Summe $\sum_i r^i \lambda_y^i$ ähnlich wie die Marktidentität für Hintergrundrisiken erklärt werden kann und somit R_y , als «Marktrendite» der Hintergrundrisiken gesehen werden kann.

6.3 Bedeutung für die SML

Was bedeuten diese Erkenntnisse nun für die SML? Vergleicht man die SML mit Hintergrundrisiken mit derjenigen ohne Hintergrundrisiken, so erhalten wir folgende Formel, welche die erwartete Rendite in Abhängigkeit der Hintergrundrisiken nun wie folgt schreiben lässt und für Berechnungen verwendet werden sollte:

$$(\mu_k - R_f) = \frac{\text{Cov}(R_k, R^M) + \text{Cov}(R_k, R_y)}{\sigma^2(R^M) + \text{Cov}(R^M, R_y)} (\mu^M - R_f) = \frac{\text{Cov}(R_k, R^M + R_y)}{\text{Cov}(R^M, R^M + R_y)} (\mu^M - R_f) \quad (6.15)$$

Wenn stattdessen die SML ohne Hintergrundrisiken berücksichtigt wird, so erkennen wir die folgenden Zusammenhänge:

- Ist $\text{Cov}(R_k, R_y) > 0$ so liegt der richtige Punkt über der SML.
- Analog gilt diese Überlegung für $\text{Cov}(R_k, R_y) < 0$, d.h. hier würde der richtige Punkt unter der SML liegen.

Diese Beobachtung zeigt, dass neben dem Marktrisiko auch die positive Korrelation zu den Hintergrundrisiken entschädigt wird.

6.4 Value Prämie und Low-Beta Anomalie

Ein Beispiel für diese Feststellung sind die Prämien, mit welchen Value Titel gehandelt werden. Value Firmen sind prozyklisch zum Markt und verlieren, wenn auch die Löhne sinken. Da die Schwankungen im Lohneinkommen ein Beispiel für Hintergrundrisiken sind, können wir mit Hintergrundrisiken viele CAPM Anomalien, wie die Value-Prämie, erklären.

Eine weitere Anomalie, die man mittels dem CAPM mit Hintergrundrisiken erklären kann, ist die Low-Beta Anomalie. Diese Anomalie besagt, dass Wertpapiere mit einem tiefen Beta eine höhere Rendite erwirtschaften als dies durch die SML impliziert wird.

Rechnungsbeispiel: Low-Beta Anomalie

Wir illustrieren den Effekt von Hintergrundrisiken nun abschliessend mit einem Rechnungsbeispiel. Wir nehmen an, dass es zwei Firmen gibt, Firma 1 und Firma 2. Ausserdem soll gelten, dass

$$\mu^M = 8\%, R_f = 1\%, \sigma^2(R^M) = 20\% \text{ und } Cov(R^M, R_y) = 0\%.$$

Firma 1 hat $Cov(R_1, R_y) = 5\%$ und $\beta_1 = 0.5$. Firma 2 hat $Cov(R_2, R_y) = -5\%$ und $\beta_2 = 1.5$.

Hier ist wie üblich $\beta_k = \frac{Cov(R^k, R^M)}{\sigma^2(R^M)}$.

Nun leiten wir die erwarteten Renditen dieser beiden Firmen her, d.h. einmal mit und einmal ohne Hintergrundrisiken. Ohne Hintergrundrisiken erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mu_{ohne}^1 &= 1\% + 0.5 \cdot (8\% - 1\%) = 4.5\%, \\ \mu_{ohne}^2 &= 1\% + 1.5 \cdot (8\% - 1\%) = 11.5\%. \end{aligned}$$

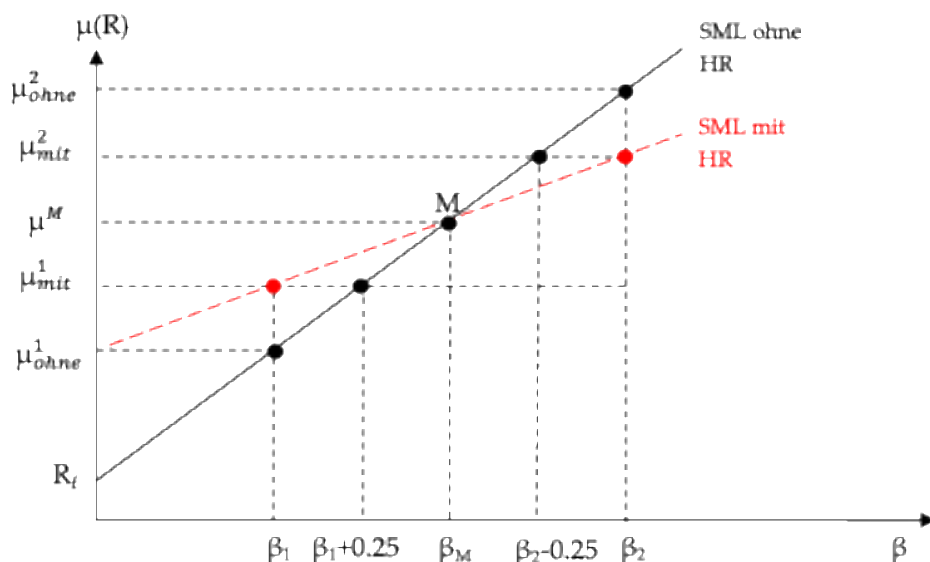
Ziehen wir nun **Hintergrundrisiken** in die Berechnung mit ein, sind wir in der Lage, die Low-Beta Anomalie zu erklären:

$$\begin{aligned} \mu_{mit}^1 &= 1\% + (\beta^1 + 0.25) \cdot (8\% - 1\%) = 6.25\%, \\ \mu_{mit}^2 &= 1\% + (\beta^2 - 0.25) \cdot (8\% - 1\%) = 9.75\%. \end{aligned}$$

Die Differenz zwischen den erwarteten Renditen beträgt nun nur noch 3.5% anstatt 7%.

In der folgenden Abbildung wird das Rechenbeispiel graphisch dargestellt.

Abbildung 6.1: Rechenbeispiel SML mit Hintergrundrisiken [HR]



Wenn man im Fall ohne HR die μ^k ohne HR gegen die $\beta^k = \frac{\text{Cov}(R^k, R^M)}{\sigma^2(R^M)}$ ohne HR abträgt, bekommt man eine SML, die in R_f beginnt und mit der Marktrisikoprämie $(\mu^M - R_f)$ steigt. Dieselbe Figur ergibt sich, wenn man im Fall mit HR die μ^k mit HR gegen die $\beta^k = \frac{\text{Cov}(R_k, R^M + R_y)}{\text{Cov}(R^M, R^M + R_y)}$ mit HR abträgt. Man bekommt wieder eine SML, die in R_f beginnt und mit der Marktrisikoprämie $(\mu^M - R_f)$ steigt. Wenn man aber diese beiden Fälle mischt und die μ^k mit HR gegen die β^k ohne HR abträgt, erscheint die SML flacher. D.h., wenn man aus Daten, die in einer Welt mit HR stammen, die μ^k bestimmt und bei der Berechnung der β^k die HR vergisst, erscheint die SML flacher.

7 CAPM mit heterogenem Verhalten

Bislang haben wir immer angenommen, dass alle Investoren anhand des Mean-Variance-Kalküls entscheiden. Das ist aber nicht realistisch, da auch viele Investoren Geld anlegen, ohne dieses Kalkül zu benutzen. In diesem Abschnitt zeigen wir, wie die SML des CAPM angepasst werden muss, wenn es $i = 1, \dots, I-1$ Mean-Variance-Investoren und eine andere Verhaltensweise für den λ^I , für den letzten Investor I gibt. Sei wie zuvor r^i das relative Vermögen des Investors $i = 1, \dots, I$. Unsere Aussage gilt für alle $r^i > 0$, d.h. der Investor I könnte sehr viel relatives Vermögen haben und λ^I die durchschnittliche Strategie einer grossen Gruppe von nicht Mean-Variance-Investoren sein. Wir leiten die SML aus dem Mean-Variance-Kalkül der Investoren $i = 1, \dots, I$ her. Nur müssen wir aufpassen, dass deren Vermögen nicht mehr als das gesamte Marktvermögen R^M ist, denn es gibt nun $\sum_{i=1}^{I-1} \lambda_k^i r^i + \lambda_k^I$, $k = 1, \dots, K$.

Wir gehen wieder zurück auf das Grundmodell mit homogenen Erwartungen und ohne Hintergrundrisiken. Dort war die Bedingung erster Ordnung für die Portfoliooptimierung:

$$\text{Cov} \lambda^i = \frac{1}{\psi^i} (\mu - R_f) \quad (7.1)$$

Multiplikation mit r^i und Summation über alle Mean-Variance-Investoren ergibt:

$$\text{Cov} \sum_{i=1}^{I-1} \lambda^i r^i = \left(\sum_{i=1}^{I-1} \frac{r^i}{\psi^i} \right) (\mu - R_f) \quad (7.2)$$

Nun ist:

$$\sum_{i=1}^{I-1} \lambda_k^i r^i = \lambda_k^M - \lambda_k^I r^I \quad (7.3)$$

Und somit ergibt sich für Wertpapier k :

$$\text{Cov}(R_k, R^M) - \text{Cov}(R_k, R^I) \cdot r^I = \sum_{i=1}^{I-1} \frac{r^i}{\psi^i} (\mu_k - R_f) \quad (7.4)$$

Wobei:

$$R^I = \sum_{k=1}^K R_k \lambda_k^I \quad (7.5)$$

Diese Gleichung gilt für alle Wertpapiere k und wir können wie zuvor mit λ_k^M multiplizieren und dann aufaddieren. Es folgt:

$$\sigma^2(R^M) - \text{Cov}(R^M, R^I) \cdot r^I = \left(\sum_{i=1}^{I-1} \frac{r^i}{\psi^i} \right) (\mu^M - R_f) \quad (7.6)$$

Wir bestimmen $\sum_{i=1}^{I-1} \frac{r^i}{\psi^i}$ durch Umformung und erhalten:

$$\sum_{i=1}^{I-1} \frac{r^i}{\psi^i} = \frac{\sigma^2(R^M) - Cov(R^M, R^I) \cdot r^I}{\mu^M - R_f} \tag{7.7}$$

Das Ergebnis kann somit in die obige Formel (7.4) eingesetzt werden und mit $(\mu^M - R_f)$ multipliziert werden:

$$[Cov(R_k, R^M) - Cov(R_k, R^I) \cdot r^I] \cdot (\mu^M - R_f) = [\sigma^2(R^M) - Cov(R^M, R^I) \cdot r^I] (\mu_k - R_f) \tag{7.8}$$

$$(\hat{\mu}_k - R_f) = \frac{Cov[R_k, (R^M - R^I r^I)]}{Cov[R^M, (R^M - R^I r^I)]} (\mu^M - R_f) \tag{7.9}$$

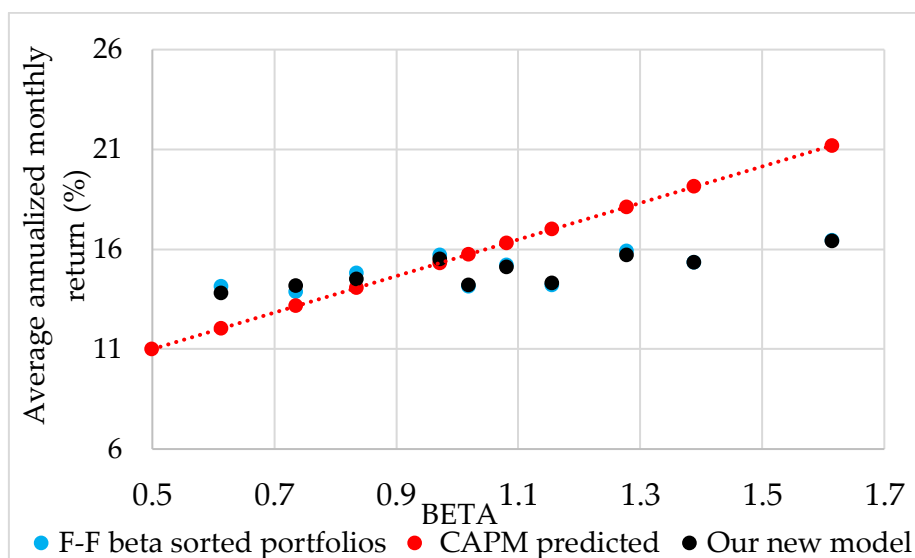
Wobei:

$$\hat{\beta}_k = \frac{Cov[R_k, (R^M - R^I r^I)]}{\sigma^2(R^M) - Cov(R^M, R^I r^I)} = \frac{Cov[R_k, (R^M - R^I r^I)]}{Cov[R^M, (R^M - R^I r^I)]} \tag{7.10}$$

Wir sehen also, wie das Beta auf diesen Fall erweitert werden kann. Insbesondere erhalten wir für $r^I = 0$ die ursprüngliche SML. Ist $Cov(R_k, R^I) > 0$ und $Cov(R^M, R^I) < 0$, so ist μ_k kleiner als im Standard-CAPM. Im Falle $Cov(R_k, R^I) < 0$ und $Cov(R^M, R^I) > 0$ ist μ_k grösser als im Standard-CAPM. Welche Erkenntnis können wir hieraus ziehen? Angenommen ein empirischer CAPM-Forscher berücksichtigt nicht, dass es auch Investoren gibt, die sich anders als Markowitz empfohlen hat, verhalten. Dann berechnet er das alte $\beta_k = \frac{Cov(R_k, R^M)}{\sigma^2(R^M)}$ und stellt fest, dass die Punkte $\hat{\mu}_k, \beta_k$ nicht auf der (alten) SML liegen, da er das alte β mit den im richtigen Markt realisierten $\hat{\mu}$ verknüpft. Er glaubt, eine CAPM-Anomalie gefunden zu haben. Hätte er aber die richtige Berechnung des Beta unter Einbezug der anderen Verhaltensweise gemacht, gäbe es allerdings kein CAPM-puzzle.

Die folgende Figur aus Hens und Naebi (2019) zeigt, dass heterogenes Verhalten die Low-Beta-Anomalie sehr gut erklären kann.

Abbildung 7.1: Erklärung der Daten von Fama und French (2014) mittels heterogenem Verhalten



Quelle: Hens und Naebi (2019).

8 Vom CAPM zur Evolutionary Finance

An diesem Punkt der Vorlesung ist es sinnvoll zusammenzufassen, was wir bereits gelernt haben und wie das nächste Thema, die Evolutionary Finance, ins Spiel kommt.

Was das CAPM aussagt und welche Ergebnisse sinnvoll sind:

Das Standard Capital Asset Pricing Model dient als Basis für eine ausgesprochen wichtige Intuition der Finance: Mehr Rendite bedeutet auch immer mehr Risiko. Möchte ein Investor eine höhere Rendite als der Markt erwirtschaften, so muss er auch mehr Risiko eingehen können (Bewegung auf der SML nach rechts). Für diese Intuition, also der Herleitung der SML, nutzt das Standard CAPM folgende Annahmen:

1. Alle Investoren müssen nach Mean-Variance-Analyse anlegen.
2. Hierfür benötigen sie homogene Erwartungen in Risiko und Rendite.
3. Es gibt keine Hintergrundrisiken.
4. Es gibt ein risikoloses Asset.

Das Ergebnis ist, wie wir in Kapitel 3 hergeleitet haben, zum einen die Security Market Line, und zum anderen die Tobin'sche Two-Fund-Separation.

Ersteres ist jene wichtige Intuition, die wir als wahr betrachten: mehr Rendite für mehr Risiko. Zweiteres, die Two-Fund-Separation, ist zwar theoretisch interessant, allerdings wissen wir, dass sie empirisch nicht wahr ist. Anleger unterscheiden sich in ihren Portfolios, sie allozieren ihr Vermögen nicht nur zwischen dem risikofreien Asset und dem Marktportfolio, wie es die Two-Fund-Separation sagt. Daher ist die Two-Fund-Separation als Ergebnis empirisch falsch und theoretisch als nicht notwendig zu betrachten. Wenn nun also Änderungen an den Annahmen gemacht werden, sollte das Resultat ein Modell sein, welches zwar die Intuition der SML repliziert (oder ändert) allerdings nicht (notwendigerweise) die Two-Fund-Separation als Ergebnis hat.

Warum wir Änderungen an den Annahmen des CAPM vorgenommen haben und welche Ergebnisse daraus resultierten:

Wenn man die Annahmen des Standard CAPM betrachtet, erkennt man, dass sie nicht der Realität entsprechen. Um das Modell etwas realitätsnaher zu gestalten, wurde versucht, eine Annahme nach der anderen zu ändern und dennoch die wichtigste Aussage, die SML, als Ergebnis herzuleiten.

Angefangen mit der Annahme, dass die Erwartungen der Investoren homogen sein müssen, wurde mit der Einführung der Heterogenität (aus Gründen der Praktikabilität nur mit den Erwartungen der Renditen und nicht der Kovarianzen) das CAPM zum ersten Mal erweitert. Das daraus resultierende Ergebnis war, dass die SML von der durchschnittlichen Erwartung der Investoren abhängt, wobei ein vermögender, risikofreudiger Investor den Durchschnitt stärker beeinflusst.

Mit der Änderung der zweiten Annahme, der Einführung der Hintergrundrisiken, konnte gezeigt werden, dass durch ein Anpassen der Kovarianzmatrix (Einführung von R_y) sich die SML dreht bzw. kippt. Das Ergebnis ist, dass wir bspw. Low-Beta Anomalie erklären können, da mit der Einführung der Hintergrundrisiken R_y innerhalb der Kovarianzmatrix die SML flacher wird. Low-Beta Titel verlieren somit ihre relative Überbewertung zu High-Beta Titel.

Mit der letzten Erweiterung wurde mit der Annahme aufgeräumt, dass alle Investoren nach Mean-Variance-Regeln anlegen müssen. Durch die Einführung des heterogenen Verhaltens durch eine Investorengruppe λ^I (Summe aller Investoren, die NICHT nach MVA anlegen) ist es möglich eine andere SML zu finden, welche besser auf die empirischen Werte passt als die ursprüngliche Standard SML. Somit kommt die SML mit heterogenem Verhalten der Realität näher. Eine Abweichung von empirischen Renditen zur Standard SML muss daher nicht unbedingt eine Anomalie sein, sondern kann einfach durch die Ignorierung anders anlegender Investoren hervorgerufen worden sein.

Was das CAPM sein möchte (und was nicht) und warum wir eine andere Art von Modell dafür benötigen:

Allerdings bleibt das CAPM auch mit seinen Erweiterungen, wie der Name schon sagt, ein Asset Pricing Modell. Das CAPM ist in der Lage zu bewerten, ob ein Titel, oder Portfolio über oder unterbewertet ist/war. Es ist wichtig zu verstehen, dass aus dieser Aussage keine direkten Portfolio-Strategieentscheidungen getroffen werden sollten. Hierfür ist das CAPM durch seinen statischen zwei-Perioden Ansatz nicht geeignet. Ein weiterer Faktor ist, dass die benötigte Mean-Variance-Strategie bspw. von einer simplen prozentualen statischen $\frac{1}{N}$ Aufteilung der Assets geschlagen wird, wie De Miguel, Garlappi und Uppal (RFS; 2010) gezeigt haben. (Wie wir am Ende des nächsten Kapitels sehen werden, legt keiner der grossartigen Investoren nach MVA an).

Wir benötigen also ein Modell, welches in der Lage ist, eine Strategie zu bewerten und nicht nur zu schauen, ob ein Portfolio über- oder unterbewertet ist. Dabei sollte das Modell mehr als zwei Perioden abbilden können (zeitlicher Verlauf vs. Status Quo Abbildung), dynamisch sein (also bspw. Wechselwirkungen verschiedener Strategien oder exogene Schocks abbilden können) und jede Strategie abbilden können.

Der Ansatz, der dies in sich vereint, nennt sich Evolutionary Finance. Hierbei agieren nicht Investoren, sondern ganze Strategien (in (relativem) Vermögen gemessen) in einem dynamischen System in drei Stufen gegeneinander (exogene Preise vs. semi-endogene Preise vs. endogene Preise). Dies ermöglicht es, jede Anlagestrategie auf deren «Fitness» (nach Darwin's Survival of the fittest) zu vergleichen.

Warum eine Betrachtung des Portfolios nicht ausreicht:

Man kann sich die Frage stellen: «Was ist der Unterschied zwischen meinem Portfolio, und meiner Strategie? Und warum ist der Unterschied von Belang?» Eine Portfolio-Betrachtung ist eine Stichtagsaufnahme, ein Snapshot der im Portfolio befindlichen Titel $k = 1, \dots, K$, deren Anzahl und Bewertung. Damit stellt sie einen Vektor λ_k dar, welcher die prozentualen Titel-Vermögens-Aufteilung innerhalb des Portfolios darstellt (Cash 0%, 19% Nestlé, 31% ABB, 50% Roche). Die Portfoliobewertung unterliegt logischerweise einem zeitlichen Verlauf von $t = 0 \rightarrow \infty$. Somit entsteht ein Vektor $\lambda_{k,t}$. Mit den Veränderungen der Titelbewertungen sind wir nun in der Lage eine Portfoliorendite zu bestimmen. Steigt dabei der Preis eines Titels stärker als ein anderer, verändert sich automatisch die Portfolioaufteilung passiv: $\lambda_{k,t=0} \neq \lambda_{k,t=1}$. Das passiert aktiv logischerweise auch durch Käufe und Verkäufe von Titeln. Diese Transaktionen passieren allerdings nicht einfach so, sondern werden aufgrund von Strategien i ausgeführt. Wir haben nun also einen Portfoliovektor $\lambda_{k,t}^i$, welcher die prozentuale Aufteilung der Titel k , zum Zeitpunkt t einer Strategie i darstellt.

In letzter Instanz ist also eine Strategie durch Ihre Käufe und Verkäufe dafür verantwortlich, dass das Portfolio aufgeteilt ist, wie es ist. Die Strategie ist das Regelkonstrukt, unter dem sich das Portfolio unterzuordnen hat. Wir suchen daher nicht nach einem guten renditestarken Portfolio, sondern nach einer guten Strategie, die dieses renditestarke Portfolio erzeugt.

Die Strategien hingegen sind unabhängig vom Agenten oder Investoren, haben zwei Investoren die exakt selbe Idee (und damit dieselben Regeln) ihr Geld anzulegen, sind ihre Strategien und damit die Portfolios identisch. Daher betrachten wir in der Evolutionary Finance nicht die einzelnen Agenten, sondern die ganzen Strategien (Summe aller Vermögen, die nach einer Strategie i anlegen).

Wie die Evolutionary Finance mit drei verschiedenen Tests eine Anlagestrategie bewerten kann:

Abschliessend soll dieser Absatz den Unterschied der drei verschiedenen Tests der Evolutionary Finance erklären, auf die wir in den folgenden Kapiteln eingehen werden. Wie weiter oben bereits angeführt unterscheiden sich die Tests in der Betrachtungsweise der Preisdaten von exogen, zu semi-endogen und abschliessend zu komplett endogen. Zur Veranschaulichung:

Back-Test mit exogenen Preisdaten:

Möchten wir die Rendite einer Strategie i gegen eine Strategie j , oder einfach den Markt selbst bewerten, so kann man den allbekannten Back-Test durchführen. Hierbei wird geschaut, wie sich die Rendite der Strategie über die Zeit hinweg entwickelt hätte, wenn man zu einem Zeitpunkt $t = 0$ angefangen hätte zu investieren. Die Preise sind hierbei durch die Vergangenheit exogen gegeben (bspw. Preisdaten aus Bloomberg). Aus den periodischen Renditen von t zu $t + 1$, kann man den arithmetischen Durchschnitt der logarithmierten Renditen ziehen. Dabei ergibt sich eine logarithmierte Wachstumsrate $g(\lambda^i, q)$, wobei λ^i für die Strategie i und q für die exogenen Preisdaten steht. Ist die Wachstumsrate $g(\lambda^i, q) > g(\lambda^j, q)$, so ist die Strategie i , derjenigen Strategie j zu bevorzugen. Die durchschnittliche Rendite ist höher.

Hier ergibt sich bei tieferer Betrachtung allerdings eine Frage. Angenommen, die eigene Strategie i wäre sehr erfolgreich, und andere Marktteilnehmer würden von ihrer Strategie j auf die «bessere» Strategie i ausweichen. Wie würde sich meine Wachstumsrate $g(\lambda^i)$ verändern, wenn andere Teilnehmer ebenfalls nach Strategie i und nicht nach Strategie j anlegen würden? Hierfür nutzen wir den Impact-Test.

Impact-Test mit semi-endogenen Preisdaten:

Innerhalb des Impact-Tests versuchen wir herauszufinden, wie sich die durchschnittliche Rendite $g(\lambda^i, q)$ ändert, wenn ein gewisser Teil $\varepsilon\lambda^i$ den Preis mitbeeinflusst und der Preis somit nicht mehr exogen, sondern semi-endogen ist. Hierbei erweitern wir den Preis des Assets q um $\varepsilon\lambda^i$, das heisst aus $g(\lambda^i, q)$ wird $g(\lambda^i, q + \varepsilon\lambda^i)$. Der Parameter ε wirkt dabei als Grad des Einflusses, den man einer Strategie in der Preisänderung zugestehen möchte.

Ändern wir den Preis q periodisch nach oben oder unten ($q + \varepsilon\lambda^i$) ändert sich dementsprechend die Rendite $g(\lambda^i, q + \varepsilon\lambda^i) \neq g(\lambda^i, q)$. Die Differenz $g(\lambda^i, q + \varepsilon\lambda^i) - g(\lambda^i, q)$ ist entweder positiv oder negativ. Ist $g(\lambda^i, q + \varepsilon\lambda^i)$ grösser (kleiner) als $g(\lambda^i, q)$ reden wir von einem Crowding-In (Crowding-Out) Effekt. Mehr relatives Vermögen in der Strategie sorgt für eine bessere (schlechtere) durchschnittliche Rendite. Der Impact-Test misst also die Differenz zweier durchschnittlichen Renditen von ein und derselben Strategie, um

herauszufinden, inwieweit es rentabel ist, dass die eigene Strategie offengelegt und von anderen Investoren mitgenutzt wird.

Reflexivity-Test mit endogenen Preisdaten:

Abschliessend wollen wir mit dem Reflexivity-Test simulieren, wie sich das relative Vermögen verschiedener Strategien $i = 1, \dots, I$ entwickeln würde, wenn die Preisdaten vollkommen endogen durch die Nachfrage und (relativen) Vermögen der getesteten Strategien i entstünden. Wir haben also keine „Bloomberg-basierten“ Preisdaten mehr, sondern simulieren den Preis ausschliesslich durch einmalig exogene relative Vermögen $r_{t=0}^i$. Der Rest ergibt sich endogen durch die jeweiligen Strategien $\lambda_{k,t}^i$.

Zur Erinnerung: Der Preis q eines Assets k entspricht der Marktkapitalisierung des Assets k , dividiert durch die Anzahl der vergebenen Aktien. Zur Vereinfachung normieren wir die Anzahl der Aktien auf 1, somit entspricht der Preis eines Assets dessen Marktkapitalisierung. Die Marktkapitalisierung entspricht wiederum der kumulierten Nachfrage der Strategien $q_k = \sum_{i=1}^I \lambda_k^i \cdot w^i$. Schreiben wir diese Formel in relativen Ausdrücken, erhalten wir die uns bekannte Gleichung $\lambda_k^M = \sum_{i=1}^I \lambda_k^i \cdot r^i$ – die Marktidentität. Der Preis ist somit endogen durch die Strategien und die Vermögen gegeben. Die durchschnittliche Wachstumsrate einer Strategie i innerhalb des Reflexivity-Tests entspricht damit $g(\lambda^i, \lambda^M)$.

Um es noch einmal anders auszudrücken:

- Die Strategien und (relativen) Vermögen ergeben den Preis eines Assets
- Diese Assetrenditen übertragen sich in die Vermögensveränderungen der Strategien
- Neue Preise, bedeuten neue Vermögen, bedeuten einen neuen strategischen Teil der Nachfrage ($\lambda_{k,t}^i(q_{k,t}) \neq \lambda_{k,t+1}^i(q_{k,t+1})$) und einen neuen Vermögensteil der Nachfrage ($r_{k,t}^i(q_{k,t}) \neq r_{k,t+1}^i(q_{k,t+1})$) bedeutet neue Preise (Hierbei entsteht allerdings ein Zirkelschluss, auf welchem im Detail in Kapitel 9 eingegangen wird).

Durch diese Vorgehensweise, der kompletten Endogenisierung, schaffen wir ein in sich geschlossenes System, hierbei werden Missmanagement, Wirtschaftszyklen, Blasen, politische Entscheidungen und alles andere realwirtschaftliche aus den Preisdaten entfernt. Das Resultat ist, dass wir somit in der Lage sind, das Verhalten von Strategien untereinander zu beobachten. Wir erkennen bspw., dass in einem vollkommen endogenen System Value-Strategien und Momentum-Strategien voneinander abhängen und keine den anderen vollkommen verdrängen kann: Wir erkennen ein Raubtier-Beutetier Schema. In anderen Szenarien wäre bspw. Zu beobachten, dass das relative Vermögen einer Strategie mit der Zeit zu Null tendiert, und somit durch eine andere Strategie aus dem Markt verdrängt wird.

Insgesamt kann die Evolutionary Finance also folgende Fragen beantworten:

- Wie wäre die Rendite der Strategie gewesen, wenn man zum Zeitpunkt $t = 0$ angelegt hätte?
- Wie hätte sich die Rendite verhalten, wenn mehr oder weniger Vermögen innerhalb der Strategie die Preise beeinflusst hätten?
- Wie würde sich die Strategie gegenüber anderen Strategien verhalten? Würde sie aussterben, oder von einer anderen Strategie abhängen?

9 Evolutionary Finance: Anlagestrategien

Das CAPM basiert auf vier Grundannahmen, die wir in den zuvor gehenden Kapiteln verallgemeinern konnten. Ein gravierenderes Manko des CAPM ist, dass es nur zwei Perioden betrachtet. Damit ist es nicht möglich Vermögensdynamik zu modellieren. Im Rest der Vorlesung zeigen wir, dass gerade die Vermögensdynamik hilft Finanzmarktmodelle mit heterogenen Strategien zu lösen. In Anlehnung an die biologische Evolution entsteht somit ein evolutionäres Finanzmodell: «Survival of the Fittest on Wall Street».

In diesem Kapitel widmen wir uns jedoch zunächst der spannenden Thematik der Vielfalt von aktiven Anlagestrategien an sich. Natürlich ist es immer auch möglich, passiv anzulegen, das heisst, das Marktportfolio zu halten. Wir betrachten hierbei anfangs die in der Literatur bekanntesten Anlagestrategien und beschreiben ihre Eigenschaften. Abschliessend werden wir die wichtigsten und erfolgreichsten Investoren (darunter Warren Buffett, Benjamin Graham, George Soros, etc.) unserer Zeit betrachten und versuchen zu analysieren, mit welchen Strategien diese Investoren zum Erfolg gekommen sind.

Die Bandbreite an Anlagestrategien ist immens. Grundsätzlich kann jeder eine eigene Strategie entwickeln. Ob sie schlussendlich zum Erfolg führen wird, ist jedoch fraglich. Besteht eine Strategie einen Back-Test, in welchem die Strategie auf historische Daten angewendet wird, sowie einen Stress-Test, bei dem Daten anhand von ökonomischen Szenarien generiert werden, dann kann man eine Investition gemäss der Strategie in Betracht ziehen.

9.1 Mean-Variance

Die Mean-Variance-Theorie wurde 1952 von Markowitz eingeführt als ein Entscheidungskriterium für die Portfolioauswahl. Seine Grundidee war es, das Risiko eines Assets mit nur einem Parameter, der Varianz zu quantifizieren. Zusammen mit dem Mittelwert sind dies die einzigen beiden Parameter, die in diesem Entscheidungsmodell verwendet werden. Harry Markowitz erhielt 1990 den Nobelpreis für seine Pionierarbeit in der Finanzökonomie. Diese Strategie haben wir in der Vorlesung schon ausführlich kennengelernt. Die Mean-Variance-Theorie setzt voraus, dass man die zu erwartenden Mittelwerte und Kovarianzen aller Assets verlässlich schätzen kann. Die folgende Liste zeigt, welche Strategie möglich ist, wenn dies nicht der Fall ist.

- | <u>Schätzbar:</u> | <u>Strategie:</u> |
|---------------------|--|
| • (μ, Cov) : | Mean-Variance |
| • $(-, Cov)$: | Min-Variance |
| • $(-, \sigma^2)$: | Equal contribution to risk ²⁰ |
| • $(-, -)$: | Naive Diversifikation ²¹ |

9.2 Carry

Die Grundidee des Carry-Investing ist, dass man mehr in solche Wertpapiere investiert, die höhere Cash-Rückflüsse versprechen. Die einfachste Carry Regel ist die Relative Dividend Yield bei der, der Anteil eines Wertpapiers proportional zu dem Yield, das heisst dem Cash-

²⁰ Bei equal contribution to risk legt der Investor anhand der Regel an, dass die Assets relativ zu ihrem Risiko gewichtet werden ($\lambda_k^i = \frac{1}{\sigma_k}$).

²¹ Die naive Diversifikation gewichtet alle Assets gleich ($\lambda_k^i = 1/N$).

Rückfluss pro investierter Geldeinheit, entspricht. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die Kursschwankungen der Anlagen über die Zeit ausgleichen werden.

9.3 Value

Die Grundidee des Value Investing ist es, dass der Wert einer Aktie nicht dem Preis derselben Aktie entspricht. Der Preis einer Aktie ergibt sich durch dessen Marktkapitalisierung, die wiederum dem Aktienkurs multipliziert mit der Anzahl Aktien entspricht. Es gibt verschiedene Kennzahlen, die zur Bestimmung des Wertes einer Aktie dienen können:

- Kurs-Gewinn-Verhältnis
- Kurs-Buchwert-Verhältnis
- Kurs-Umsatz-Verhältnis
- Kurs-Cashflow-Verhältnis
- Gesamtkapitalrendite
- Eigenkapitalrendite

9.4 Momentum

Das Motto «The trend is your friend» ist die Grundidee der Momentum-Strategie: Momentum-Investoren wollen dabei sein, wenn sich ein Trend abzeichnet. Gemäss Momentum Investoren lohnt es sich nicht Geld für die Analyse von Fundamentaldaten auszugeben, da die Preise diese schneller vorwegnehmen, als die Daten gesammelt und ausgewertet werden können. Bei der Momentum Strategie werden Aktientitel gekauft, die in der nahen Vergangenheit eine gute Performance hatten (sogenannte „winners“) und Aktientitel verkauft, die in den letzten Monaten eine schlechte Performance aufweisen (sogenannte „losers“).

Die Idee dahinter ist, dass die Rendite der Aktien in den letzten Monaten ein guter Indikator für die Entwicklung der Aktien in naher Zukunft ist. Laut der Effizienzmarkthypothese sollte es nicht möglich sein, aus Preisen, also öffentlich verfügbaren Informationen, eine Überrendite zu generieren. Empirisch konnte jedoch gezeigt werden, dass die Renditen von Momentum Strategien sehr gross sind. Aus diesem Grund stehen Momentum Strategien im Widerspruch zur Effizienzmarkthypothese.

9.5 Growth

Die Wachstumsinvestoren vergleichen wie die Value-Investoren Preis und Wert, jedoch berechnen die Growth-Investoren den Wert anders. Wachstumsinvestoren investieren in Aktien eines Unternehmens, dessen Gewinne in der Vergangenheit stark gestiegen sind, mit der Erwartung, dass sich dieses Verhalten auch in Zukunft zeigen wird, entlang des Lebenszyklus.

9.6 Faktor

Die Idee des Faktorinvestierens ist es, die verschiedenen Anlagestile anhand von ihren Faktoren zu kombinieren und bei jeder Phase des Marktes den richtigen Anlagestil zu wählen.

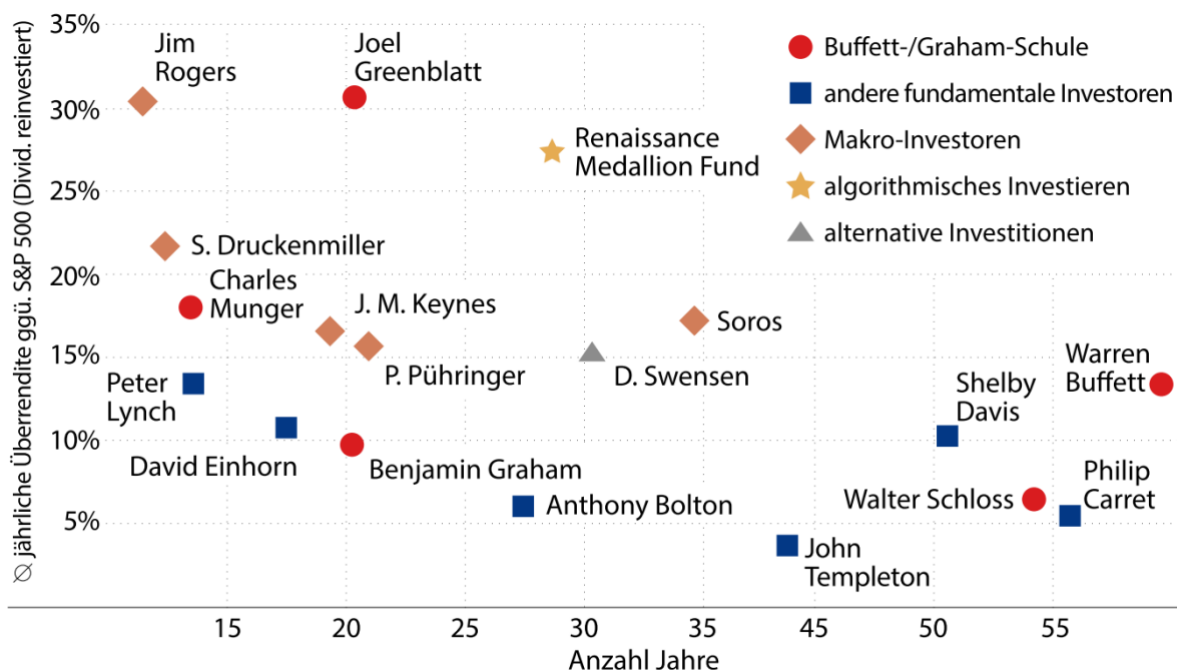
9.7 Grossartige Investoren

Gemäss der Effizienzmarkthypothese von Fama kann der Markt nicht geschlagen werden. Trotzdem gibt es einige Investoren, die mit ihrer Strategie systematische Überrenditen

generieren. Fama schiebt dies auf den Zufall ab. Diese Behauptung steht jedoch auf wackligen Füßen. Offensichtlich performen die Investoren, die den Markt langfristig zu schlagen scheinen, nicht nur zufällig so gut. Es müssen andere Faktoren dahinterstehen, warum es zu diesem Phänomen kommt.

Es kann durchaus sein, dass Investoren in einem Jahr, vielleicht sogar in zwei Jahren den Markt schlagen. Wenn aber die Rede von den grossartigen Investoren ist, dann betrachtet man ausschliesslich diejenigen Investoren, welche mindestens über 10 Jahren den Markt geschlagen haben. In der Abbildung 9.1 sind diese Investoren markiert. Warren Buffett hat zum Beispiel fast über 60 Jahre investiert und hat den Markt um ca. 15% pro Jahr geschlagen. Er und Benjamin Graham sind sogenannte Value-Investoren, d.h. sie achten auf die Kursverläufe von Aktien und investieren gemäss den spezifischen Kriterien, welche wir bereits kennengelernt haben.

Abbildung 9.1: Grossartige Investoren



Quelle: Gurufocus.com / Hens (2018).

Überrenditen können natürlich nicht nur mit Aktien generiert werden. Ein anschauliches Beispiel hierfür ist die Strategie von George Soros, welcher bevorzugt in Währungen zu investieren und so in 35 Jahren eine durchschnittliche jährliche Überrendite von rund 17% generiert. Interessant ist, dass keiner der bislang bekannten grossartigen Investoren eine Mean-Variance-Strategie verfolgt hat. Das Ziel der Evolutionary Finance, ist die dynamische Interaktion der Strategien zu modellieren, um neue Erkenntnisse für die Generierung von langfristig erfolgreichen Strategien zu gewinnen.

10 Evolutionary Model

10.1 Einführung

Biologie und Finance haben mehr miteinander zu tun als man auf den ersten Blick glauben könnte. Speziell Darwin's Evolutionstheorie ist ein gutes Paradigma für die Finanzwelt. Ganz nach dem Motto (Survival of the Fittest on Wall Street) können wir Faktoren der Evolution auf die Finance übertragen. Diese Richtung wird daher Evolutionary Finance genannt. Auch wenn diese Forschungsrichtung im Gegensatz zur klassischen Finance noch nicht im «Mainstream» angekommen ist, so gibt es doch einige sehr interessante Forschungsergebnisse. Vor allem Evstigneev, Hens und Schenk-Hoppé haben dazu beigetragen (siehe folgendes Kapitel). Doch beginnen wir mit Parallelen bzw. den Analogien zwischen Evolution und Finance.

10.2 Analogie zur Biologie

Um die Finanzwelt besser verstehen zu können, können wir eine interessante Analogie zur Biologie ziehen. Wir beginnen mit dem Vergleich einer Pflanze und einem Tier. Während eine Pflanze, ohne dass sie anderen Lebewesen schadet, überleben kann (mit Photosynthese etc.), muss ein Tier anderes Leben (ob Tier oder Pflanze) zerstören, um überleben zu können.

In der Anlagewelt entsprechen die passiven Anleger den Pflanzen. Sie schaden den anderen Anlegern nicht wirklich. Bei den aktiven Anlegern, d.h. den Tieren, ist dies ein wenig anders: Das aus der Mikroökonomie bekannte Falken-Tauben Spiel zeigt auf, dass es nicht auf ein Individuum an sich ankommt, sondern auf die relative Aufteilung. Wenn es mehr Falken als Tauben hat, drohen die Tauben auszusterben, die Falken haben jedoch dadurch weniger zu fressen und der relative Falken-Anteil nimmt ab. So können sich die Tauben wieder vermehren und dadurch auch die Falken wieder.

Ähnlich ist diese Idee in der Anlagewelt: Es kommt darauf an, wie viel Vermögen auf welchen Strategien aufgeteilt wird und wie somit die Gegenpartei beeinflusst wird. Allerdings ist dies nicht die einzige Analogie zwischen der Biologie und dem Finanzmarkt.

Ökologische Bedingungen als Wirtschaftswachstum:

In der Ökologie gibt es fundamentale, exogene *Bedingungen* für Leben: Temperatur, Klima etc. Sie sind kurzfristig nicht beeinflussbar durch die Lebewesen dieser Welt. Am ehesten können diese *Konditionen* mit dem Wirtschaftswachstum verglichen werden. Solow (1956) hat das in seinem Economic Growth Modell, welches Wachstum als Funktion von Kapital und Arbeit definiert, beschrieben. Wie die naturellen Konditionen kann in der Finanzwelt das Wirtschaftswachstum auf kurze Sicht nicht beeinflusst werden. Es geschieht einfach. Trotzdem muss sich jedes einzelne Individuum danach richten.

Natürliche Ressourcen als Marktkapital:

Die *natürlichen Ressourcen* einer Ökologie entsprechen dem Marktkapital. Sie sind verfügbar und können mit cleveren Methoden abgeschöpft werden. Doch aufgepasst vor einer Übernutzung. Genau wie bei den natürlichen Ressourcen kann es auch beim Marktkapital zu Knappheit kommen. Die Individuen können dies antizipieren und neue Methoden der Nutzung entwickeln.

Spezies als Investmentstrategien

Die verschiedenen *Spezies* sind die Investmentstrategien. Die Evolutionary Finance legt den Fokus nicht auf einen einzelnen Investor, sondern auf eine ganze Strategie. Tabelle 4 zeigt diesen Zusammenhang. Mr. X und Ms. Y legen beide nach der Strategie von *Buy and Hold* an, in Summe entsprechen diese einzelnen Vermögen w_1^1 und w_1^2 der gesamten Spezies *Buy and Hold* (was allgemein durch $\sum_{n=1}^N w_1^n$ ausgedrückt wird).

Tabelle 4: Von Investoren zu Strategien

Strategien	Investoren						Summe
	Mr. X	Mrs. Y	PK 1	PK 2	...	PK N	
Buy and Hold	w_1^1	w_1^2	w_1^N	$\sum_{n=1}^N w_1^n$
MVA
1/N
Value
Growth
Mom	w_M^1
Summe	$\sum_{m=1}^M w_m^1$	$\sum_{m=1}^M w_m^N$	$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_m^n$

Quelle: Eigene Darstellung.

Selektion als Gewinne und Verluste:

Auch die Analogie der *natürlichen Selektion* ist erklärbar. Diese kann mit den Gewinnen und Verlusten aus den Investmentstrategien verglichen werden.

Mutation als Innovation:

Mutationen von Lebewesen sind hingegen wie Innovationen von Spezies, also Anlagestrategien. Es sind Anpassungen an die momentane politische oder auch wirtschaftliche Marktsituation. Innovationen, sowie auch Mutationen, sind ein Prozess der Evolution und können dazu führen, dass Individuen sich einen neuen Platz im Gebilde ergattern.

Massenaussterben als Crash:

In der Evolution, sowie auch in der Finanzwelt, kann es von Zeit zu Zeit zu *Katastrophen* kommen. Massenaussterben sind Finanzcrashes sehr ähnlich. Ganze Spezies können dadurch eliminiert werden.

Interaktion mit Anlagestrategien:

Betrachtet man die Interaktion von Anlagestrategien ebenfalls genauer, so kann man auch hier Parallelen zur Biologie ziehen. Dabei wird grundsätzlich zwischen vier Interaktionstypen unterschieden:

- Raubtier-Beutetier
- Verdrängungswettbewerb
- Symbiose
- Parasitismus

So entsprechen die Interaktionen von Momentum und Value Strategie, der Raub- und Beutetier-Analogie, bei der nie eine Art gewinnen wird, sondern mehr eine Populationsdynamik entsteht. Der Verdrängungswettbewerb wird in der Finanzwelt durch die ETFs und Mutual Funds dargestellt. Derivate und deren Underlyings bilden eine Art Symbiose und ein Beispiel für parasitäres Verhalten ist das Front Running einer Hochfrequenzstrategie gegenüber dem periodischen Rebalancing von institutionellen Anlegern, wie Pensionskassen.

Auch wenn es sich nur um Analogien handelt, so wird schnell deutlich, dass die Finance grosse Parallelen zur biologischen Evolution hat. Im folgenden Kapitel wird dieses Modell beschrieben.

10.3 Ein Evolutionäres Finanz-Modell

Grundsätzlich sind Strategien dadurch beschrieben, wie viel Prozent des Vermögens durch die Strategie i auf die Anlage k investiert wird. Dazu definieren wir wie zuvor eine Variable λ , welche die relevanten Informationen enthält:

$$\lambda_{k,t}^i \quad (10.1)$$

Wobei $i = 1, \dots, I$ den Strategien entsprechen, mittels derer investiert wird. $k = 1, \dots, K$ stellt die verschiedenen Assets dar. Der Anteil $k = 0$ entspricht dem, was für Konsum gebraucht wird. Die Rolle des Konsums entspricht der Anlage im Modell mit einer risikofreien Anlage. Eine Strategie i investiert zum Zeitpunkt t demnach $\lambda\%$ in das Asset k .

Im folgenden Modell ist es zentral, dass alle Strategien möglich sein können, solange sie keine zukünftigen Informationen benutzen. Das Problem mit zukünftigen Informationen ist, dass wir sie weder kennen noch verlässlich schätzen können.

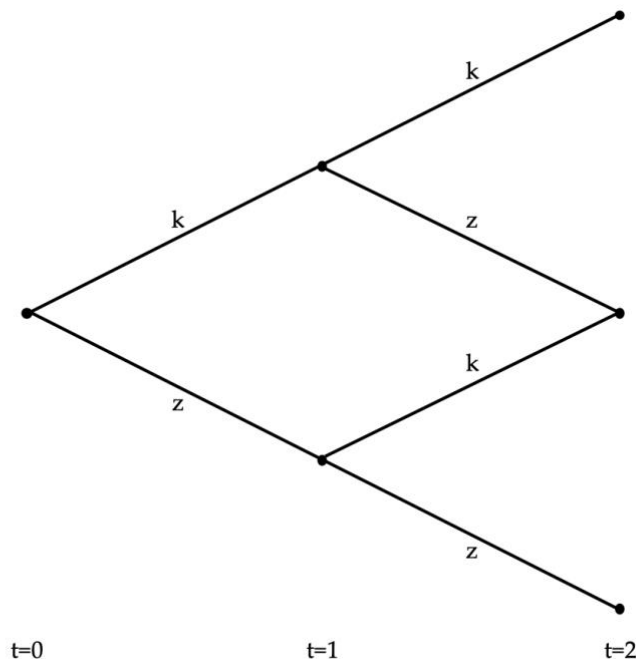
10.3.1 Die Entwicklung des Vermögens

Das Evstigneev-Hens-Schenk-Hoppe (2006) [EHS] – Modell beschreibt die Entwicklung des relativen Vermögens, wenn gemäss $\lambda_{k,t}^i$ investiert wird. In einem ersten Schritt soll die Entwicklung des Vermögens definiert werden. Diese ist offensichtlich abhängig davon, was alles schon passiert ist. Verschiedene vergangene Informationen hatten unterschiedliche Auswirkungen auf die Zustandsvariablen des Modells. Wir definieren $\omega_t \in \Omega$ als einen

Zustand zum Zeitpunkt t . ω^t ist ein Vektor mit einer endlichen Anzahl an vergangenen Zuständen $(\omega_0, \dots, \omega_t)$. D.h. ω^t beschreibt den Pfad, wie man in jene Periode t gelangt ist.

Als Beispiel dient der Binomialprozess, wie in Abbildung 10.1 gezeigt. Sei $\Omega = \{k, z\}$ wie bei einem Münzwurf. Dann ergibt sich der abgebildete Binomialprozess wie folgt: Es gibt also 4 Pfade nach 2 Perioden: (k, k) , (k, z) , (z, k) , (z, z) . Der Pfad (k, z) folgt aus dem Pfad k .

Abbildung 10.1: Binomialprozess



Quelle: Eigene Darstellung.

Zudem gilt die Budgetrestriktion $\sum_{k=1}^K \lambda_{k,t}^i = 1 - \lambda_{0,t}^i$, die angibt, wie das Vermögen w_t^i auf die K Wertpapiere und den Konsum aufgeteilt wird. Die Entwicklung des Vermögens ist offensichtlich:

$$w_{t+1}^i(\omega^{t+1}) = \left\{ \sum_{k=1}^K \left[\frac{D_{k,t+1}(\omega^{t+1}) + q_{k,t+1}(\omega^{t+1})}{q_{k,t}(\omega^t)} \right] \cdot \lambda_{k,t}^i(\omega^t) \right\} \cdot w_t^i(\omega^t) \quad (10.2)$$

Dabei ist D_k die Dividende für Aktie k und q_k der Preis der Aktie k . In Worten gefasst hängt also das zukünftige Vermögen von der Entwicklung des Portfolios (geschwungene Klammer) und vom vergangenen Vermögen ab. D.h. Investieren führt zu einem multiplikativen Prozess von Renditen.

10.3.2 Interaktion im Markt (absolute Vermögen)

Das kurzfristige Gleichgewicht in Periode t kann (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) wie gewohnt durch Nachfrage = Angebot beschrieben werden. Dabei wird das Angebot auf 1 normiert:

$$\sum_{i=1}^I \theta_{k,t}^i(\omega^t) = \sum_{i=1}^I \frac{\lambda_{k,t}^i(\omega^t) \cdot w_t^i(\omega^t)}{q_{k,t}(\omega^t)} = \bar{\theta}_{k,t} = 1 \quad (10.3)$$

Wir können $q_{k,t}$ als Marktkapitalisierung der Firma k interpretieren.

Die Gleichgewichtspreise sind dann:

$$q_{k,t}(\omega^t) = \sum_{i=1}^I \lambda_{k,t}^i(\omega^t) \cdot w_t^i(\omega^t) \quad (10.4)$$

Der Preis des Assets k ist der Vermögens-Durchschnitt des Portfolioanteils der Strategien für Asset k . Wir können nun weiter zeigen, wie das Gesamtvermögen mit den aggregierten Dividenden zusammenhängt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I w_t^i &= \sum_{i=1}^I \left(\sum_{k=1}^K [(D_{k,t} + q_{k,t}) \cdot \theta_{k,t-1}^i] \right) \\ &= \sum_{k=1}^K (D_{k,t} + q_{k,t}) \sum_{i=1}^I \theta_{k,t-1}^i \\ &= \sum_{k=1}^K D_{k,t} + \sum_{k=1}^K q_{k,t}, \quad \text{wobei } q_{k,t} = \sum_{i=1}^I \lambda_{k,t}^i w_t^i \\ &= \sum_{k=1}^K D_{k,t} + \sum_{i=1}^I \left(\sum_{k=1}^K \lambda_{k,t}^i \right) w_t^i \\ &= \sum_{k=1}^K D_{k,t} + (1 - \lambda_0) \sum_{i=1}^I w_t^i \\ \lambda_0 \sum_{i=1}^I w_t^i &= \sum_{k=1}^K D_{k,t} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Bei dieser Herleitung haben wir angenommen, dass alle Strategien dieselbe Konsumrate haben. Dies ist gerechtfertigt, da wir keiner Strategie im Wettstreit um Vermögenswachstum einen Vor- oder Nachteil durch die Konsumrate geben wollen.

10.3.3 Die Entwicklung des relativen Vermögens

Den Zusammenhang zwischen Gesamtvermögen und aggregierten Dividenden benutzen wir nun, um die Entwicklung des relativen Vermögens zu betrachten. Mit dieser Funktion lassen sich schlussendlich verschiedene Strategien gleichzeitig miteinander vergleichen. Gäbe es beispielsweise nur zwei Strategien im Markt, so kann die Interaktion der beiden mit einer Zahl modelliert werden. Mittels Simulation kann dann gezeigt werden, wie sich die relativen Vermögen der Investoren mit Strategie i entwickeln, falls gleichzeitig Investoren mit Strategie j auf dem Markt sind. Unter Beachtung der oben hergeleiteten Beziehung zwischen dem Gesamtvermögen und den aggregierten Dividenden kann die Entwicklung des relativen Vermögens $r^i(\omega)$ wie folgt dargestellt werden:

$$r_{t+1}^i(\omega^{t+1}) = \left\{ \sum_{k=1}^K \left[\frac{\lambda_0 d_{k,t+1}(\omega^{t+1}) + \hat{q}_{k,t+1}(\omega^{t+1})}{\hat{q}_{k,t}(\omega^t)} \right] \cdot \lambda_{k,t}^i(\omega^t) \right\} \cdot r_t^i(\omega^t) \quad (10.6)$$

Wobei:

$$\hat{q}_{k,t}(\omega^t) = \frac{q_{k,t}(\omega^t)}{\sum_{i=1}^I w_t^i(\omega^t)} \quad (10.7)$$

$$d_{k,t+1}(\omega^{t+1}) = \frac{D_{k,t+1}(\omega^{t+1})}{\sum_{j=1}^K D_{j,t+1}(\omega^{t+1})} \quad (10.8)$$

$$r_t^i(\omega^t) = \frac{w_t^i(\omega^t)}{\sum_{i=1}^I w_t^i(\omega^t)} \quad (10.9)$$

10.3.4 Interaktion im Markt (relative Vermögen)

Der Gleichgewichtspreis für Asset k ist dann:

$$\hat{q}_{k,t}(\omega^t) = \sum_{i=1}^I \lambda_{k,t}^i(\omega^t) \cdot r_t^i(\omega^t) \quad (10.10)$$

und ist daher auch der relative Vermögens-Durchschnitt des Portfolioanteils der Strategien für Asset k .

10.3.5 Ein dynamisches System

Wir versuchen nun mit den soeben hergeleiteten Funktionen ein dynamisches System zu entwickeln.²² Damit kann man schlussendlich zeigen, wie sich das relative Vermögen von Periode 1 über Periode 2 und so weiter, bis Periode n entwickelt.

Versucht man jedoch, die Funktion für das relative Vermögen in einem Spreadsheet Programm zu implementieren, so wird es vorerst eine Fehlermeldung (Zirkelreferenz) geben. Setzen wir nämlich den Gleichgewichtspreis im zweiten Summanden des Zählers ein, ist die rechte Seite der Gleichung ebenfalls abhängig von relativen Vermögen in Periode $t + 1$. Wir müssen also r_{t+1} im Gleichgewichtspreis redefinieren. Wir lösen die Gleichung nach r_{t+1} auf und erhalten:

$$r_{t+1} = \lambda_0 \cdot \left(Id - \left[\frac{\lambda_{k,t}^i(\omega^t) \cdot r_t^i(\omega^t)}{\sum_{j=1}^I \lambda_{k,t}^j(\omega^t) r_t^j(\omega^t)} \right]_i \right)^{-1} \cdot \Lambda_{t+1}(\omega^{t+1}) \left[\sum_{k=1}^K d_{k,t+1}(\omega^{t+1}) \cdot \frac{\lambda_{k,t}^i(\omega^t) \cdot r_t^i(\omega^t)}{\sum_{j=1}^I \lambda_{k,t}^j(\omega^t) r_t^j(\omega^t)} \right]_i \quad (10.11)$$

Wobei Id eine $I \times I$ Identitätsmatrix und Λ die $K \times I$ Matrix aller λ ist. Man beachte, dass ein tiefgestellter (hochgestellter) Index an einer Matrix die Laufvariable der Zeilen (Spalten) bezeichnet. Nun haben wir ein dynamisches System kreiert, mit dem wir das zukünftige relative Vermögen berechnen können. Das Modell berücksichtigt das Gleichgewicht von

²² Ein dynamisches System auf einem Definitionsbereich X ist eine Abbildung $f: X \rightarrow X$ mit der Eigenschaft, dass $x_{t+1} = f(x_t)$, d.h. die Zeit läuft konsekutiv von der Vergangenheit in die Zukunft.

Angebot und Nachfrage in jeder Periode, dass keine perfekten Vorhersagen möglich sind, und die stochastische Dynamik der Dividenden.

10.3.6 Überrendite im Modell

Es hat sich herausgestellt, dass eine Strategie im Rahmen des Modells mit extrem positiven Eigenschaften heraussticht. Die Rede ist von der Expected-Relative-Dividend-Strategie:

$$\lambda_k^* = (1 - \lambda_0) \mathbb{E}_p d_{k,\omega} \quad (10.12)$$

Vorausgesetzt, dass die relativen Dividenden i.i.d. und die Strategien stationär adaptiert sind, das heisst die Strategien benutzen keine Informationen, die erst in der Zukunft bekannt werden, kann die Wachstumsrate einer jeden Strategie λ^i in einem Markt λ^M dargestellt werden als²³:

$$g(\lambda^i, \lambda^M) = \mathbb{E}_p \ln \left(1 - \lambda_0 + \lambda_0 \cdot \sum_{k=1}^K d_{k,\omega} \cdot \frac{\lambda_k^i}{\lambda_k^M} \right) \quad (10.13)$$

Beachte, dass immer noch die Marktidentität (vgl. Formel (3.5)) gilt:

$$\lambda_k^M = \sum_{i=1}^I \lambda_k^i \cdot r^i \quad (10.14)$$

10.3.7 Eigenschaften der Überrendite

Mit der ermittelten Wachstumsrate ergeben sich einige Implikationen.

Nicht jede Strategie kann besser als der Durchschnitt sein:

Des einen Gewinns, ist des anderen Verlust, da wir relative Vermögen betrachten. Es gilt $\sum_{i=1}^I r^i g(\lambda^i, \lambda^M) = 0$, denn es ist $\sum_{i=1}^I r^i(t) = 1$. Ableiten nach t ergibt $\sum_{i=1}^I \partial_t r^i(t) = 0$. Die Wachstumsrate g ist aber:

$$g(\lambda^i, \lambda^M) = \frac{\partial_t r^i(t)}{r^i(t)} \quad (10.15)$$

und somit:

$$\partial_t r^i(t) = g(\lambda^i, \lambda^M) r^i(t) \quad (10.16)$$

Mit Buy and Hold des Marktportfolios wird das relative Vermögen beibehalten:

$$\theta_{k,t}^i = \gamma \cdot \bar{\theta}_k \text{ impliziert } r^i = \frac{\sum_k q_k \theta_{k,t}^i}{\sum_k q_k \bar{\theta}_k} = \gamma \quad (10.17)$$

Da $\lambda_{k,t}^i = \lambda_{k,t}^M$ für alle $k = 1, \dots, K$. In Form der Strategien $\lambda_{k,t}^i$ heisst das:

²³ Siehe Evstigneev, Hens und Schenk-Hoppe (2006).

$$\lambda_{k,t}^i = \frac{q_{k,t} \theta_{k,t}^i}{w_t^i} = \frac{q_{k,t} \bar{\theta}_{k,t}}{w_t^i} \frac{\sum_i w_t^i}{\sum_k q_{k,t} \bar{\theta}_{k,t}} = \frac{\gamma \lambda_{k,t}^M}{r_t^i} = \lambda_{k,t}^M \quad (10.18)$$

Wobei wie zuvor gilt, dass $w_t^i = \sum_k q_{k,t} \bar{\theta}_{k,t}$. Das heisst, ein passiver Investor überlebt immer. Hierbei sollte man beachten, dass es in diesem Modell keine Evolution der Wertpapiere gibt. Falls immer wieder nur Wertpapiere hinzukämen, so würde ein Buy and Hold Investor immer unbedeutender, wie EHSB gezeigt haben.

In der Masse verstecken ergibt keine Überrendite:

Es gilt $g(\lambda^M, \lambda^M) = 0$. Machen alle dasselbe, so kann niemand gewinnen oder verlieren, denn:

$$g(\lambda^M, \lambda^M) = \mathbb{E}_p \ln \left(1 - \lambda_0 + \lambda_0 \sum_{k=1}^K d_{k,\omega} \frac{\lambda_k^M}{\lambda_k^M} \right) \quad (10.19)$$

Da:

$$\sum_{k=1}^K d_{k,\omega} \frac{\lambda_k^M}{\lambda_k^M} = 1 \quad (10.20)$$

folgt $g(\lambda^M, \lambda^M) = \mathbb{E}_p \ln(1) = 0$

Unter-Diversifikation ist riskant:

Wenn $\lambda_k^M \rightarrow 0$ für einige k , dann gilt $g(\lambda^i, \lambda^M) > 0$ für alle $\lambda^i \gg 0$, denn $\frac{\lambda_k^i}{\lambda_k^M} \rightarrow \infty$ und somit $g(\lambda^i, \lambda_k) > 0$.

In einem effizienten Markt funktioniert nichts:

Eine Übertragung Famas Effizienzmarkthypothese in das evolutionäre Finanzmarktmodell, wäre $g(\lambda^i, \lambda^i) \leq 0$ für alle λ^i . Das heisst jede aktive Strategie verliert in einem effizienten Markt.

Ineffiziente Märkte sind nicht stabil:

Für alle $\lambda^M \neq \lambda^i$ existiert ein λ^i mit $g(\lambda^i, \lambda^M) > 0$.

Die letzten beiden Behauptungen können wie folgt bewiesen werden. Zur Konkretisierung nehmen wir $s = 1, \dots, S$ Zustände der Welt an:

$$g(\lambda^i, \lambda^M) = \sum_{s=1}^S p_s \cdot \ln \left(1 - \lambda_0 + \lambda_0 \cdot \sum_{k=1}^K d_{k,s} \cdot \frac{\lambda_{k,t}^i}{\lambda_k^M} \right) \quad (10.21)$$

Man beachte, dass

1. $g(\cdot, \lambda^M)$ strikt konkav ist, da die Logarithmusfunktion strikt konkav ist²⁴.
2. Wie oben gezeigt ist $g(\lambda^M, \lambda^M) = 0$. Wenn von λ_k^M ausgehend $g(\cdot, \lambda^M)$ in keine Richtung steigt, dann und nur dann erreicht $g(\lambda^i, \lambda^M)$ an der Stelle $\lambda^i = \lambda^M$ die höchste

²⁴ Hierbei nehmen wir an, dass die Matrix der relativen Dividenden $[d_{k,s}^i]_{s=1, \dots, S}^{k=1, \dots, K}$ vollen Spaltenrang K hat, sodass es nicht zwei verschiedene Vektoren x und y gibt, die dasselbe Ergebnis $[d]x = [d]y$ liefern.

Wachstumsrate. Richtungsableitung unter Einhaltung der Budgetrestriktion $\sum_{k=1}^K \lambda_k^i = 1 - \lambda_0$ ist:

$$\nabla_{\lambda^i} g(\lambda^i, \lambda^M) \cdot d\lambda^i \quad (10.22)$$

Dabei ist $\nabla_{\lambda^i} g(\lambda^i, \lambda^M)$ der Vektor der partiellen Ableitungen der Funktion g nach der ersten Variable mit den K -Komponenten $\lambda_k^i, k = 1, \dots, K$. Die Komponente k des Vektors ist:

$$\partial_{\lambda_k^i} g = \lambda_0 \cdot \left(\sum_{s=1}^S p_s \cdot \frac{d_{k,s}}{\lambda_k^M} \cdot \frac{1}{1 - \lambda_0 + \lambda_0 \cdot \sum_{k=1}^K d_{k,s} \cdot \frac{\lambda_{k,t}^i}{\lambda_k^M}} \right) \quad (10.23)$$

Falls $\lambda_k^M = \lambda_k^* = (1 - \lambda_0) \sum_{s=1}^S p_s d_{k,s}$, folgt:

$$\nabla_{\lambda^i} g = \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.24)$$

Also:

$$(\nabla_{\lambda^i} g) d\lambda^i = 0 \text{ f\u00fcr } \sum_{k=1}^K d\lambda_k^i = 0 \quad (10.25)$$

Andernfalls:

$$\nabla_{\lambda^i} g \neq \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.26)$$

Sodass:

$$(\nabla_{\lambda^i} g) d\lambda^i > 0 \quad (10.27)$$

F\u00fcr ein $d\lambda^i$.

10.3.8 Theoretische Resultate

Implementiert man die Expected-Dividend-Strategie λ^* in das Modell und vergleicht es mit diversen anderen Strategien, kommt man zu folgenden Erkenntnissen:

1. λ^* ist der einzige *global survivor* mit i.i.d. Dividenden oder zeitkonstanten Strategien $\lambda_{k,t}^i$.
2. F\u00fcr allgemeine Dividendenprozesse d kann man zeigen, dass eine verallgemeinerte relative Dividendenstrategie im Wettstreit mit allen theoretisch m\u00f6glichen Strategien die h\u00f6chste Wachstumsrate des Verm\u00f6gens erzielt.

Das heisst, ohne die verallgemeinerte relative Dividenden-Strategie zu kennen, kann man folgende qualitative Aussagen treffen. Eine erfolgreiche Strategie muss

- Cash-Flow basiert sein,
- kontrazyklisch anlegen,
- gut diversifiziert sein.

3. Angenommen Dividenden d folgen einem stationären Markov-Prozess, dann ist λ die einzige evolutionär stabile Strategie.

10.4 Der Global Portfolio One

Eine direkte Umsetzung der evolutionären Strategie λ^* in Form eines globalen Aktien ETFs ist der Global Portfolio One von Dr. Andreas Beck. Der Global Portfolio One, GPO, bildet die «Welt AG» in Form von Exchange Traded Funds²⁵, ETF, ab. Durch den GPO bekommen Investoren kostengünstig Zugang zu Aktien von mehr als 7000 Unternehmen weltweit. Der GPO ist mit 7000 Aktien sehr breit diversifiziert. Er schichtet zwischen den Aktien und Cash (Investitionsreserve) nach der Eigenkapitalrentabilität²⁶ der Aktien kontrazyklisch um. Das heisst, wenn die Kurse der Aktien einbrechen und zu vermuten ist, dass es sich dabei um eine Übertreibung²⁷ handelt, dann erhöht der GPO den Aktienanteil, da zu vermuten ist, dass die Eigenkapitalrendite gestiegen ist. Der Mechanismus der Umschichtungen erfolgt anhand der Aufteilung des globalen Aktienmarktes in drei Regimes:

A: „Normal“ (Risikokapitalkosten der Welt AG sind auf Normalniveau):

80% Welt AG / 20% Investitionsreserve

B: „Eigenkapitalknappheit“ (Risikokapitalkosten der Welt AG sind deutlich erhöht):

90% Welt AG / 10% Investitionsreserve

C: „Eskalation der Eigenkapitalknappheit“ (Risikokapitalkosten der Welt AG sind extrem hoch):

100% Welt AG

Die Steuerung erfolgt vereinfacht so:

A → B: Aktienmarktverlust zum Dreijahreshoch > 20%, sprunghafte Erhöhung der Volatilität am Aktienmarkt, Ausweitung der Risikoprämien bei Unternehmensanleihen.

B → C: Aktienmarktverlust seit Regimewechsel A → B oder C → B > 25%

Eskalation der Risikoprämien bei Unternehmensanleihen.

C → B: Aktienmarktgewinn zum Dreijahrestief > 50%, Beruhigung der Volatilität am Aktienmarkt und der Risikoprämien am Anleihemarkt.

B → A: Aktienmarktgewinn seit Regimewechsel A → B oder C → B > 25%, Rückkehr der Volatilität und der Risikoprämien zum langfristigen Mittel.

Wie die Coronakrise im Frühjahr 2020 gezeigt hat, ist diese kontrazyklische Steuerung sehr erfolgreich. Für Details verweise ich auch das Buch «Erfolgreich wissenschaftlich investieren» von Andreas Beck.

²⁵ Ein ETF bildet einen Aktienindex durch Zusammenstellen der wesentlichen Titel des Indexes proportional zur Grösse, d.h. zur Marktkapitalisierung der Aktien, ab.

²⁶ Unternehmen nehmen Eigenkapital, vor allem in Form von Aktienausgabe auf. Der Gewinn relativ zum eingesetzten Eigenkapital ist die Eigenkapitalrendite.

²⁷ In Krisenphasen sind viele Anleger nicht mehr auf die **zukünftige** Rendite ausgerichtet, sondern sie verkaufen aus psychologischen Gründen (sie halten die Verluste nicht mehr aus), aus regulatorischen Gründen (ihre Risikofähigkeit, zum Beispiel der Deckungsgrad bei Pensionskassen, ist erschöpft) oder aus Vorsichtsgründen (ihr Risikomanagement, zum Beispiel basierend auf der Volatilität, fordert eine Reduktion der Aktienquote).

Die Übereinstimmung des GOP mit der EPT

Die von mir und Ko-autoren²⁸ entwickelte Evolutionäre Portfolio Theorie betrachtet den Wettstreit von Anlagestrategien am Aktienmarkt. Sie basiert auf den evolutionären Prinzipien Mutation und Selektion und arbeitet eine Anlagestrategie heraus, die langfristig am erfolgreichsten ist. D.h. im Gegensatz zu dem, was in der Finanzwissenschaft üblich ist, wird der Aktienmarkt nicht anhand von Investoren, sondern anhand von Anlagestrategien (biologisch: Arten) beschrieben. Die Anlagestrategien kämpfen um Marktkapital (biologisch: Ressourcen), was der biologischen Selektion der Arten entspricht. Zudem ist das Modell jederzeit offen für neue Anlagestrategien (biologisch: Mutationen). Die Evolutionäre Portfolio Theorie sucht nach Anlagestrategien, die langfristig betrachtet die höchste Wachstumsrate des Vermögens erzielen (biologisch: Survival Strategien). Somit sind kurzfristige Schwankungen, die zum Beispiel in der Sharpe-Ratio²⁹ Eingang finden, für die Evolutionäre Portfolio Theorie egal – ja sogar eine Chance auf höhere Renditen!

Das wesentliche Ergebnis der Evolutionäre Portfolio Theorie ist, dass eine Anlagestrategie, die das Vermögen proportional zu den erwarteten relativen Dividenden anlegt, die höchste Wachstumsrate erzielt. In den wissenschaftlichen Aufsätzen nennen wir diese Strategie λ^* . Um diese Strategie genau zu beschreiben, benötigen wir etwas Notation: Seien D_t^k die Dividenden, die Unternehmen $k = 1, \dots, K$ in Periode $t = 1, 2, \dots$ an die Anteilseigner pro Aktie ausschütten. Dann ist im einfachen Fall³⁰ der prozentuale Anteil des Vermögens, den die Strategie λ^* in Aktie k zum Zeitpunkt t investiert $\lambda_t^{*,k} = E_t\left(\frac{D_t^k S_t^k}{\sum_k D_t^k S_t^k}\right)$, wobei S_t^k die Anzahl der vom Unternehmen k ausgegebenen Aktien zum Zeitpunkt t ist. Die Strategie λ^* ist also breit diversifiziert, da sie in alle Aktien (die überhaupt einmal eine Dividende zahlen) investiert. Zudem ist die Strategie λ^* wertbasiert und kontrazyklisch. D.h. wenn in einer Krise die Aktienkurse mehr als die zu erwartenden Dividenden einbrechen, dann kauft die Strategie nach, da sonst der prozentuale Anteil der Aktien im Portfolio nicht mehr der fundamentalen Kennziffer basierend auf den zukünftigen relativen Dividenden entspricht. In komplizierteren Fällen gelten dieselben Grundregeln «breit diversifizieren und fundamental kontrazyklisch anlegen». Nur kann man unter Umständen die Strategie λ^* nicht mehr explizit ausrechnen, da sie sich als Lösung eines nicht-linearen stochastischen Gleichungssystems ergibt.

Der GOP basiert auf denselben drei Grundregeln wie die Strategie λ^* : breit diversifizieren, fundamental und kontrazyklisch anlegen. In der Tat ist die Übereinstimmung sogar noch viel tiefer, wie die folgenden Ausführungen zeigen. Hierzu benötigen wir noch etwas Notation. Sei p_t^k der Preis pro Aktie. Dann ist $M_t^k = p_t^k S_t^k$ die Marktkapitalisierung des Unternehmens k zum Zeitpunkt t . Gemäss der üblichen ökonomischen Theorie werden die Gewinne der Unternehmen durch Einsatz von Kapital³¹ anhand von Produktionsfunktionen produziert. Da Dividenden üblicherweise eine Funktion³² der Gewinne sind, ergibt sich also eine Funktion f , die das Gesamtvolumen der Dividenden einer Unternehmung durch die Marktkapitalisierung

²⁸ Vor allem möchte ich Rabah Amir, Igor Evstigneev und Klaus Reiner Schenk Hoppe hervorheben.

²⁹ Den Quotienten aus der Überrendite einer Aktie relativ zum risikofreien Zins dividiert durch die Volatilität der Aktie nennt man nach dem Erfinder Bill Sharpe, die Sharpe-Ratio.

³⁰ D.h., wenn die relativen Dividenden über die Zeit, wie bei einem wiederholten Münzwurf, identisch und unabhängig voneinander verteilt sind.

³¹ Kapital ist Eigenkapital und Fremdkapital. Aber bei gegebenem Fremdkapital ist der Gewinn dann immer noch eine Funktion des Eigenkapitals.

³² Beliebige sind bei Unternehmen feste Aufteilungsregeln, zum Beispiel, dass als Dividenden die Hälfte der Gewinne ausgeschüttet werden. Aber jede andere Funktion kann hier angenommen werden.

beschreibt³³: $D_t^k S_t^k = f_t^k(M_t^k)$. Die Eigenkapitalrendite kann mit dieser Notation dann wie folgt definiert werden: $EKR_t^k = \frac{f_t^k(M_t^k)}{M_t^k}$. Blicken wir nun zurück auf die Evolutionäre Strategie, so kann man mit ein paar elementaren Umformungen zeigen, dass sie ziemlich genau das empfiehlt, was der GOP in der Praxis implementiert hat: $\lambda_t^{*,k} = E_t \left(\frac{D_t^k S_t^k}{\sum_k D_t^k S_t^k} \right)$. Mit Berücksichtigung der Produktionsfunktionen ergibt sich, dass: $\lambda_t^{*,k} = E_t \left(\frac{f_t^k(M_t^k)}{\sum_k f_t^k(M_t^k)} \right)$. Schliesslich muss man bedenken, dass der GPO in Aktien nicht nur gemäss den Eigenkapitalrenditen investiert, sondern das Kapital in die zugrundeliegenden ETFs gemäss der Marktgrösse M_t^k aufteilt³⁴. D.h. die prozentuale Aufteilung im GPO ist eigentlich gemäss $EKR_t^k M_t^k = f_t^k(M_t^k)$, also genau wie in der Evolutionären Portfoliotheorie!

10.5 Anwendung der Evolutionären Portfoliotheorie zur Dynamisierung des CAPM

Das CAPM bestimmt die zu erwartenden Renditen von Wertpapieren relativ zum Marktportfolio. Im CAPM werden die Risikoaversionen der Anleger und ihre Vermögen als exogen angenommen. Jedoch zeigt die Evolutionäre Portfolio Theorie, dass sich Vermögen durch den Marktselektionsprozess im Laufe der Zeit stark verschieben können. Welchen Einfluss hat dies auf die Security Market Line, SML, des CAPM? Zunächst stellen in Analogie zur Mikroökonomie klar, was eigentlich exogen und was endogen im CAPM ist. Dann zeigen wir auf, dass im Gegensatz zum Standard CAPM im CAPM mit heterogenem Verhalten eine Veränderung der relativen Vermögen die zu erwartenden Renditen der Wertpapiere verschiebt. Deshalb kombinieren wir anschliessend – wie in Hens und Naebi (2022) das CAPM mit heterogenem Verhalten mit der Evolutionären Portfoliotheorie. Als Ergebnis erhalten wir, dass die Betas im CAPM durch fundamentale Eigenschaften der Wertpapiere (z.B. deren Dividenden) erklärt werden können.

Das Gleichgewichtskonzept der Mikroökonomie:

Gegeben $i = 1, \dots, I$ Konsumenten und $k = 1, \dots, K$ Güter sowie Nutzenfunktionen $U^i(x^i)$, $x^i \in R_+^K$ und Erstausrüstungen $\omega^i \in R_+^K$. Dann ist ein **Walrasianisches Gleichgewicht** eine Allokation der Güter x^i , $i = 1, \dots, I$ und ein Preissystem p_k , $k = 1, \dots, K$

Sodass

- (1) x^i maximiert $U^i(x^i)$ über der Budgetrestriktion $\sum_k p_k x_k^i = \sum_k p_k \omega_k^i$
- (2) Angebot = Nachfrage $\sum_i x_k^i = \sum_i \omega_k^i$, $k = 1, \dots, K$.

Im Gleichgewichtskonzept der Mikroökonomie sind also die Präferenzen und die Vermögen exogen und diese bestimmen die Allokationen der Güter und die Preise. Was ist eigentlich im CAPM exogen und was endogen? Die Antwort liefert das Gleichgewichtskonzept des CAPM:

³³ In den Proceedings of the National Academie of Science haben wir empirisch gezeigt, dass die Funktion f gut durch die einfache Funktion $f_t^k(x) = a_t^k x^{0.8}$ beschrieben werden kann.

³⁴ Aus der Aufteilung des GOP in die verschiedenen Regionen, wie sie in Andreas Beck's Buch auf Seite 18 angegeben ist, ist die Gewichtung nach der Marktgrösse offensichtlich.

Das Gleichgewichtskonzept des CAPM im Standardfall:

Gegeben $k=1,\dots,K$ Wertpapiere mit relativer Marktkapitalisierung λ_k^M und $i = 1, \dots, I$ Investoren mit Vermögen w^i und Nutzenfunktionen $U^i(\lambda^i) = R_f + (\mu(R) - R_f)\lambda^i - \alpha^i \sigma^2(R\lambda^i)$, definiert auf $\lambda^i \in R^K$. Dann ist ein CAPM-Gleichgewicht eine Allokation von Portfolios $\lambda^i \in R^K$, $i = 1, \dots, I$ und ein Renditesystem $\mathbf{R} \in R_+^{S \times K}$

sodass

- (1) λ^i maximiert $U^i(\lambda^i)$ gegeben \mathbf{R}
(die Budgetrestriktion ist schon in $U^i(\lambda^i)$ berücksichtigt.)
- (2) Angebot = Nachfrage $\sum_i \frac{\lambda_k^i}{\sum_k \lambda_k^i} r^i = \lambda_k^M, k = 1, \dots, K$, wobei $r^i = \frac{w^i}{\sum_i w^i}$.

Bemerkung: Im CAPM-Gleichgewicht gilt:

- a) Two Fund Separation: $\frac{\lambda_k^i}{\sum_k \lambda_k^i} = \lambda_k^M, k = 1, \dots, K, i = 1, \dots, I - 1$
- b) SML $\mu(R_k) - R_f = \beta_k(\mu(R^M) - R_f)$, wobei $\beta_k = \frac{\text{Cov}(R_k, R^M)}{\sigma^2(R^M)}$ und $R^M = \sum_k R_k \lambda_k^M$.

Wegen der Two Fund Separation ist das CAPM-Gleichgewicht, insbesondere die SML, unabhängig von den Relativvermögen $r^i, i = 1, \dots, I$. Dies gilt jedoch nicht für Erweiterungen des CAPMs zum Beispiel auf heterogene Erwartungen oder auf heterogenes Verhalten.

Gegeben $k=1,\dots,K$ Wertpapiere mit relativer Marktkapitalisierung λ_k^M und $i=1,\dots,I$ Investoren mit Relativvermögen r^i und Nutzenfunktionen $U^i(\lambda^i) = (\mu(R) - R_f)\lambda^i - \alpha^i \sigma^2(R\lambda^i), i=1,\dots,I-1$

Dann ist ein CAPM-Gleichgewicht mit heterogenem Verhalten:

eine Allokation von Portfolios $\lambda^i \in R^K, i = 1, \dots, I$ und ein Renditesystem $\mathbf{R} \in R^{S \times K}$

Sodass

- (1) λ^i maximiert $U^i(\lambda^i)$ gegeben $\mathbf{R}, i = 1, \dots, I - 1$ und λ^I macht evtl. was anderes
- (2) Angebot = Nachfrage $\sum_i \frac{\lambda_k^i}{\sum_k \lambda_k^i} r^i = \lambda_k^M, k = 1, \dots, K$

Bemerkung: Im CAPM-Gleichgewicht gilt:

- a) Two Fund Separation $\frac{\lambda_k^i}{\sum_k \lambda_k^i} = \lambda_k^M, k = 1, \dots, K, i = 1, \dots, I - 1$
- b) SML $\mu(R_k) - R_f = \beta_k(\mu(R^M) - R_f)$, wobei $\beta_k = \frac{\text{Cov}(R_k, R^M - r^I R^I)}{\text{Cov}(R^M, R^M - r^I R^I)}$ und $R_k^M = \sum_k R_k \lambda_k^M$.

Das CAPM-Gleichgewicht, insbesondere die SML, ist nun nicht notwendigerweise unabhängig von den Relativvermögen r^I . Betrachtet man zum Beispiel, wie sich die zu erwartenden Renditen im CAPM mit heterogenem Verhalten bei exogener Änderung der Relativ-Vermögens der Nicht-Mean-Variance Anleger, verändert, so erhält man:

Effekt von r^I auf R_k ist durch die Ableitung von $(\mu(R_k) - R_f)$ nach r^I gegeben:

$$\partial_{r^I}^I (\mu(R_k) - R_f) = \frac{-\text{Cov}(R_k, R^I) \text{Cov}(R^M, R^M) + \text{Cov}(R_k, R^M) \text{Cov}(R^M, R^I)}{[\text{Cov}(R^M, R^M) - r^I \text{Cov}(R^M, R^I)]^2} (\mu^M - R_f)$$

Nimmt man an, dass es eine Aktienprämie gibt, $(\mu^M - R_f) > 0$, so ist die Ableitung negativ, dann und nur dann, wenn $\text{Corr}(R_k, R^M) \text{Corr}(R^I, R^M) < \text{Corr}(R_k, R^I)$

Beachtet man, dass sich r^i mit der Zeit verändert (s.u. für eine genaue Formel),

$$r_{t+1}^i = \sum_k R_{k,t+1} \lambda_{t,k}^i r_t^i$$

so verändern sich auch die Renditen über die Zeit!

Nun zeigen wir, wie sich gemäss Hens and Naebi (2020) im **CAPM mit heterogenem Verhalten** die Vermögen aufgrund der Evolutionären Portfolio Theorie entwickeln:

Wir beginnen mit $w_{t+1}^i = \alpha \sum_{k=0}^K R_{k,t+1} \lambda_{t,k}^i w_t^i$, wobei α die Rate des Wiederanlegens ist und setzen $R_{k,t+1} = \frac{D_{t+1}^k + p_{t+1}^k}{p_t^k}$ und die Marktidentität $p_t^k = \alpha \sum_{i=1}^I \lambda_{t,i}^k w_t^i$, ein. Nach einigen Berechnungen (siehe Hens and Naebi (2020) erhält man

$$r_{t+1}^i = \frac{w_t}{w_{t+1}} \left(1 - \alpha \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \lambda_{t+1}^{i,k} \left(\frac{\lambda_{t,i}^k r_t^i}{\sum_{i=1}^I \lambda_{t,i}^k r_t^i} \right) \right)^{-1} \left[\sum_{k=1}^K d_{t+1}^k \left(\frac{\lambda_{t,i}^k r_t^i}{\sum_{i=1}^I \lambda_{t,i}^k r_t^i} \right) + \alpha R_f \lambda^0 r_t^i \right]$$

wobei $\frac{w_t}{w_{t-1}} = \frac{\bar{d}_t + \alpha R_f \lambda^0}{1 - \alpha(1 - \lambda^0)} = \gamma_t$, $\bar{d}_t = \sum_{k=1}^K d_t^k$ und $D_t^k = d_t^k w_{t-1}$.

Dies ist wie (10.11) ein zufälliges dynamisches System auf den Relativvermögen! Nur mussten wir (10.11) um eine risikolose Anlage erweitern. Wie im Fall ohne risikolose Anlage, können Hens und Naebi (2022) zeigen, dass das zufällige dynamische System zu der erwarteten relativen Dividendenstrategie, λ^* , konvergiert. Und dies hat dann folgende Auswirkung auf die Betas:

$$\beta_t^{*,k} = \theta + (1 - \theta) \frac{\text{Cov} \left(\frac{D_t^k}{MC_{t-1}^k}, \frac{\bar{D}_t}{TMC_{t-1}} \right)}{\text{Var} \left(\frac{\bar{D}_t}{TMC_{t-1}} \right)} \tag{10.51}$$

wobei MC_{t-1}^k die Marktkapitalisierung des Asset k zum Zeitpunkt t-1 und TMC_{t-1} die totale Marktkapitalisierung und \bar{D}_t die totalen Dividenden sind. Mit der Definition $DY_t^k = \frac{D_t^k}{p_{t-1}^k}$ und unter Berücksichtigung, dass $MC_{t-1}^k = p_{t-1}^k$, erhalten wir $\beta_t^{*,k} = \theta + (1 - \theta) \frac{\text{Cov}(DY_t^k, \bar{DY}_t)}{\text{Var}(\bar{DY}_t)}$, wobei $\theta = \alpha(1 - \lambda^0)$. In der Tat bestätigen Hens und Naebi (2022) für den DJIA von 1981-2019 empirisch, dass die Betas im CAPM in der Realität eine Tendenz haben, zu den fundamentalen Betas gemäss (10.51) zu konvergieren: Für die Regressionsgleichung $(\beta_t^k - \beta_t^{*,k}) = a_t + b_t(\beta_{t-1}^k - \beta_{t-1}^{*,k}) + \varepsilon_t$ erhalten sie, dass der Koeffizient b_t kleiner als 1 ist, wie die folgende Tabelle zeigt:

Tabelle 5: Dynamik der CAPM-Betas

Method of Estimation	Coefficient		Std. Error	t-Statistic	p-value of the Wald F-Statistic	R-squared
Panel Least Squares	a_t	0.0951	0.0560	1.697	0.090	0.4053
	b_t	0.6403	0.0389	16.429	0.000	

Quelle: Eigene Darstellung.

Das heisst: Mittels des CAPM mit heterogenem Verhalten kann man das CAPM dynamisieren. Das Ergebnis von EHSB zur Dynamik des Relativvermögens führt dann auf fundamentale Betas und in der Tat konvergieren die CAPM-betas gegen diese fundamentalen Betas.

Literaturverzeichnis

- Ang, Andrew, Robert Hodrick, Yuhang Xing, und Xiaoyan Zhang, 2006, The Cross-Section of Volatility and Expected Returns, *Journal of Finance*, Vol. 61. No. 1. Februar.
- Baker, Malcom, Brendan Bradley, und Jeffrey Wurgler, 2011, Benchmarks as Limits to Arbitrage: Understanding the Low-Volatility Anomaly, *Financial Analysts Journal*, Vol. 67, No. 1, Januar.
- Bodie, Zvi, Alex Kane, und Alan Marcus, 2013, *Investments* (McGraw-Hill Education, New York).
- Carhart, Mark M., 1997, On Persistence in Mutual Fund Performance, *The Journal of Finance*, Vol. 52., No. 1, März.
- Chen, Nai-Fu, Ingersoll Jonathan E., 1983, Exact Pricing in Linear Factor Models with Finitely Many Assets: A Note, *The Journal of Finance*, Vol. 38., No. 3, Juni.
- DeMiguel, Victor, Lorenzo Garlappi, und Raman Uppal, 2009, Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy?, *The Review of Financial Studies*, Vol. 22, No. 5, Dezember.
- Digikey, 2018, Pick the Right ADC to Minimize Display Flicker, <https://www.digikey.com/en/articles/techzone/2018/feb/pick-the-right-adc-to-minimize-display-flicker>, 23.01.2019.
- Evstigneev, Igor V., Thorsten Hens, und Klaus Reiner Schenk-Hoppé, 2006, Evolutionary Stable Stock Markets, *Economic Theory*, Vol. 27, No. 2, Februar.
- Fama Eugene F., und French Kenneth R., 1996, Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies, *Journal of Finance*, Vol. 51, No. 1, März.
- Fama, Eugene F., 1970, Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, *The Journal of Finance*, Vol. 25, Mai.
- Fama, Eugene F, und Kenneth R. French, 2004, The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 18, No. 3, Sommer.
- Frazzini, Andrea, und Lasse Heje Pedersen, 2014, Betting against Beta, *Journal of Financial Economics*, Vol. 111, No 1, Januar.
- Gehrig, Bruno, und Heinz Zimmermann, 2000, *Fit for finance: Theorie und Praxis der Kapitalanlage*, (Verlag Neue Zürcher Zeitung, Zürich).
- Gerber, Anke, und Thorsten Hens, 2017, Modelling Alpha in a CAPM with Heterogenous Beliefs, *Journal of Finance and Economics*, Vol. 5, No. 2, Juni.
- Graham, Benjamin, und David L. Dodd, 1934, *Security Analysis: Principles and Technique*, (Whittlesey House/ McGraw Hill, New York).
- Greenwood, Robin, Shleifer Andrei and Yang You, 2017, Bubbles for Fama, SSRN-working paper no 2924281.
- Gurufocus, 2018, Gurus: Scoreboard, https://www.gurufocus.com/score_board.php, 15.08.2018.

- Hens, Thorsten und Fatemeh Naebi (2020). Behavioral Heterogeneity in the CAPM with an Application to the Low-Beta Anomaly, *Applied Economics Letters*, 28(6), 501–507. <https://doi.org/10.1080/13504851.2020.1761529>
- Hens, Thorsten und Fatemeh Naebi (2022). Behavioral Heterogeneity in the CAPM with Evolutionary Dynamics, *Journal of Evolutionary Economics*,
- Hens, Thorsten, und Marc O. Rieger, 2016, *Financial Economics – A Concise Introduction to Classical and Behavioral Finance (Second Edition)*, (Springer Verlag, Heidelberg).
- Jegadeesh, Narasimham, und Sheridan Titman, 1993, Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency, *The Journal of Finance*, Vol. 48, No. 1, März.
- Keown, Arthur J., und John Pinkerton, 1981, Merger Announcements and Insider Trading Activity: An Empirical Investigation, *The Journal of Finance*, Vol. 36, September.
- Kindleberger, Charles P., und Robert Z. Aliber, 2005, *Manias, Panics and Crashes: A History of Financial Crises*, (Palgrave Macmillan, Basingstoke).
- Liew, Jimmy, und Maria Vassalou, 2000, Can Book-to-Market, Size and Momentum be Risk Factors that Predict Economic Growth?, *Journal of Financial Economics*, Vol. 57, No. 2, August.
- Lintner, John, 1965, Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification, *The Journal of Finance*, Vol. 20, No. 4, Dezember.
- Lintner, John, 1969, The Aggregation of Investor's Diverse Judgements and Preferences in Purely Competitive Security Markets, *The Journal of Finance and Quantitative Analysis*, Vol. 4, No 4, Dezember.
- Lux, Thomas, 1995, Herd Behavior, Bubbles and Crashes, *Economic Journal*, Vol. 105, No. 431, Juli.
- Markowitz, Harry, 1952, Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, März.
- Mondello, Enzo, 2018, *Finance: Angewandte Grundlagen* (Springer Fachmedien, Wiesbaden).
- Mossin, Jan, 1966, Equilibrium in a Capital Asset Market, *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, Oktober.
- Petkova, Ralitsa und Lu Zhang, 2005, Is value riskier than growth?, *Journal of Financial Economics*, Vol. 78, No. 1, Oktober.
- Roll, Richard, 1977, A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests Part I: On Past and Potential Testability of the Theory, *Journal of Financial Economics*, Vol. 4, No. 2, März.
- S&P Dow Jones Indices, 2018, S&P Eurozone Sovereign Bond Index (EUR), <https://us.spindices.com/indices/fixed-income/sp-eurozone-sovereign-bond-index>, 14.08.2018.
- Sharpe, William Forsyth, 1964, Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *The Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, September.
- Shiller, Robert J., 2000, *Irrational Exuberance*, (Princeton University Press, Princeton).
- Shiller, Robert J., 2018, Online Data Robert Shiller, <http://www.econ.yale.edu/~shiller/data.htm>.
- Shleifer, Andrei und Robert W. Vishny, 1997, The Limits of Arbitrage, *The Journal of Finance*, Vol. 52, No. 1, März.

- SIX Swiss Exchange, 2018, Swiss Market Index SMI, https://www.six-swiss-exchange.com/indices/data_centre/shares/smi_family_en.html, 14.08.2018.
- Solow, Robert M., 1956, A Contribution to the Theory of Economic Growth, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, No. 1, Februar.
- Sornette, Didier, 2003, *Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*, (Princeton University Press, Princeton).
- Tobin, James, 1958, Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, *Review of Economic Studies*, Vol. 25, No. 2, Februar.
- Volkart, Rudolf, und Alexander Wagner, 2018, *Corporate Finance – Grundlagen von Finanzierung und Investition* (Versus Verlag AG, Zürich).
- Woesthoff, Mathis-Hendrik, 2018, Bachelorarbeit: Anwendung der Evolutionary Portfolio Theory auf den S&P 500 Index, Universität Zürich.
- Xiong, James, und Thomas M. Idzorek, 2011, The Impact of Skewness and Fat Tails on the Asset Allocation Decision, *Financial Analysts Journal*, Vol. 67, No. 2, April