Eine nützliche und weit verbreitete Methode, um Aktienoptionen zu bewerten, ist die Verwendung eines Binomialbaumes. *Darunter versteht man eine Darstellung, die verschiedene Pfade aufzeigt, denen der Aktienkurs während der Laufzeit der Option folgen kann. Grundlegende Annahme dabei ist, dass der Aktienkurs einem Random Walk folgt. In jedem Zeitschritt gibt es eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, dass sich der Aktienkurs um einen bestimmten Prozentsatz aufwärts bewegt, und eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, dass er sich um einen bestimmten Prozentsatz abwärts bewegt. Für die Grenzbetrachtung unendlich kleiner Zeitschritte gleicht dieses Modell dem Black-Scholes-Merton-Modell, das wir in Kapitel 14 diskutieren werden. Wie wir im Anhang zu diesem Kapitel zeigen werden, ist es tatsächlich so, dass der durch den Binomialbaum gegebene Preis einer europäischen Option gegen den Black-Scholes-Merton-Preis konvergiert, wenn die Zeitschritte kleiner werden.*

Das Material in diesem Kapitel ist in mehrerer Hinsicht von Bedeutung. Es erklärt erstens die Natur der No-Arbitrage-Argumente für die Bewertung von Optionen und zweitens das Binomialbaumverfahren, welches weithin zur Bewertung amerikanischer Optionen und anderer Derivate benutzt wird. Außerdem wird hier das sehr wichtige Prinzip der risikoneutralen Bewertung eingeführt.

Der Ansatz, den wir hier wählen, entspricht jenem, den Cox, Ross und Rubinstein im Jahre 1979 in einem wichtigen Artikel veröffentlicht haben. Weitere Details über die Verwendung numerischer Verfahren auf der Basis von Binomialbäumen finden sich in Kapitel 20.

12.1 Das Einperioden-Binomialmodell und ein No-Arbitrage-Argument

Wir beginnen mit einer sehr einfachen Situation. Der aktuelle Aktienkurs beträgt 20 \$. Es ist bekannt, dass der Aktienkurs in drei Monaten entweder 22 \$ oder 18 \$ betragen wird. Wir möchten einen europäischen Call auf den Kauf der Aktie in drei Monaten für 21 \$ bewerten. Die Option wird am Ende der drei Monate einen von zwei Werten aufweisen. Wenn der Aktienkurs auf 22 \$ steigt, wird die Option 1 \$ wert sein; sinkt der Aktienkurs auf 18 \$, wird der Wert der Option null sein. Diese Situation ist in Abbildung 12.1 dargestellt.

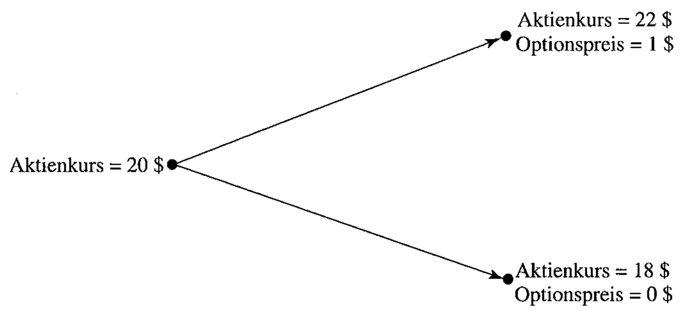

Abbildung 12.1: Aktienkursbewegung für das Beispiel aus Abschnitt 12.1

Es zeigt sich, dass in diesem Fall zur Bewertung der Option eine elegante Argumentation herangezogen werden kann. Die einzige notwendige Annahme besteht darin, dass keine Arbitragemöglichkeiten existieren sollen. Wir bilden ein Portfolio aus der Aktie und der Option so, dass es keine Unsicherheit hinsichtlich des Werts des Portfolios am Ende der drei Monate gibt. Dann argumentieren wir, dass die Rendite des Portfolios dem risikolosen Zinssatz entsprechen muss, weil das Portfolio kein Risiko aufweist. Dies erlaubt es uns, die Kosten für das Portfolio und damit den Optionspreis zu bestimmen. Da es zwei Wertpapiere (die Aktie und die Aktienoption) und nur zwei mögliche Zustände für den Aktienkurs gibt, ist es immer möglich, ein risikoloses Portfolio zu bilden.

Betrachten wir ein Portfolio, das aus einer Long-Position in Δ Aktien und einer Short-Position in einer Kaufoption besteht (Δ bezeichnet hierbei die Sensitivitätskennzahl Delta). Wir berechnen den Wert von Δ, der das Portfolio risikolos macht. Wenn der Aktienkurs von 20 \$ auf 22 \$ steigt, ist der Wert der Aktien 22Δ und der Wert der Option eins, sodass der Gesamtwert des Portfolios $22\Delta - 1$ beträgt. Wenn der Aktienkurs von 20 \$ auf 18 \$ fällt, ist der Wert der Aktien 18Δ und der Wert der Option null, sodass der Gesamtwert des Portfolios 18Δ ist. Das Portfolio ist risikolos, wenn der Wert von Δ so gewählt wird, dass der Endwert des Portfolios für beide Alternativen identisch ist. Das heißt, es gilt

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

oder

$$\Delta = 0{,}25 \ .$$

Ein risikoloses Portfolio ist daher

- Long: 0,25 Aktien,
- Short: 1 Option (Call).

Wenn der Aktienkurs auf 22 \$ steigt, ist der Wert des Portfolios

$$22 \cdot 0{,}25 - 1 = 4{,}5 \ .$$

Wenn der Aktienkurs auf 18 \$ fällt, ist der Wert des Portfolios

$$18 \cdot 0{,}25 = 4{,}5 \ .$$

Ungeachtet dessen, ob der Aktienkurs steigt oder fällt, ist der Wert des Portfolios am Ende der Laufzeit der Option stets 4,5. Δ bezeichnet also die Anzahl der Aktienanteile, die nötig ist, um die Short-Position in einer Option abzusichern. Δ ist eine der Sensitivitätskennzahlen, welche wir in Kapitel 18 betrachten werden.

Risikolose Portfolios müssen bei Nichtexistenz von Arbitragemöglichkeiten den risikolosen Zinssatz verdienen. Angenommen, der risikolose Zins beträgt in diesem Fall 12% per annum. Daraus folgt, dass der heutige Wert des Portfolios dem Barwert von 4,5 oder

$$4{,}5\,e^{-0{,}12 \cdot 3/12} = 4{,}367$$

entsprechen muss.

Es ist bekannt, dass der aktuelle Aktienkurs 20 \$ ist. Der Optionspreis wird mit f bezeichnet. Der heutige Wert des Portfolios beträgt

$$20 \cdot 0{,}25 - f = 5 - f \ .$$

Daraus folgt

$$5 - f = 4{,}367$$

oder

$$f = 0{,}633\ .$$

Dies zeigt, dass bei Nichtexistenz von Arbitragemöglichkeiten der aktuelle Wert der Option 0,633 betragen muss. Wenn der Wert der Option größer als 0,633 wäre, würde die Bildung des Portfolios weniger als 4,367 kosten und mehr als den risikolosen Zinssatz erzielen. Bei einem Wert der Option von weniger als 0,633 würde der Verkauf des Portfolios eine Möglichkeit für die Aufnahme von Kapital zu weniger als dem risikolosen Zinssatz bieten.

Verallgemeinerung

Wir können die eben aufgezeigte No-Arbitrage-Argumentation verallgemeinern, indem wir eine Aktie mit dem Preis S_0 betrachten sowie eine Option auf diese Aktie bzw. ein beliebiges anderes von der Aktie abhängiges Derivat, deren gegenwärtiger Preis f beträgt. Wir nehmen an, dass die Option über die Zeit T läuft und der Aktienkurs während dieser Zeit entweder von S_0 auf den neuen Level S_0u steigen oder von S_0 auf S_0d fallen kann, wobei $u > 1$ und $d < 1$ gilt. Der relative Anstieg des Aktienkurses bei einer Aufwärtsbewegung beträgt $u - 1$; die relative Abnahme des Aktienkurses bei eine Abwärtsbewegung beträgt $1 - d$. Wenn der Aktienkurs auf S_0u steigt, nehmen wir an, dass die Auszahlung der Option f_u beträgt; wenn der Aktienkurs auf S_0d fällt, nehmen wir an, dass die Auszahlung der Option f_d beträgt. Die Situation ist in Abbildung 12.2 dargestellt.
Wie zuvor betrachten wir ein Portfolio, das aus der Long-Position in Δ Aktienanteilen und der Short-Position in einer Option besteht. Wir berechnen den Wert für Δ, der das Portfolio risikolos werden lässt. Wenn der Aktienkurs steigt, beträgt der Wert des Portfolios am Ende der Laufzeit der Option

$$S_0u\Delta - f_u\ .$$

Wenn der Aktienkurs fällt, ergibt sich ein Wert von

$$S_0d\Delta - f_d\ .$$

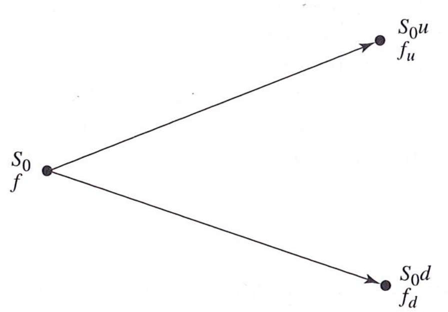

Abbildung 12.2: Aktien- und Optionspreise in einem allgemeinen Einperioden-Baum

Beide Werte sind gleich, wenn

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d\ ,$$

d. h.

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \qquad (12.1)$$

gilt.

In diesem Fall ist das Portfolio risikolos und muss, damit es keine Arbitragemöglichkeiten gibt, eine Rendite in Höhe des risikolosen Zinssatzes erzielen. Gleichung (12.1) zeigt, dass Δ das Verhältnis der Änderung des Optionspreises zur Änderung des Aktienkurses angibt, wenn wir uns zum Zeitpunkt T zwischen den Knoten bewegen. Bezeichnen wir den risikolosen Zinssatz mit r, ergibt sich der Wert des Portfolios als

$$(S_0u\Delta - f_u)\mathrm{e}^{-rT}\ .$$

Die Kosten für die Bildung des Portfolios betragen

$$S_0\Delta - f\ .$$

Daraus folgt

$$S_0\Delta - f = (S_0u\Delta - f_u)\mathrm{e}^{-rT}\ ,$$

oder

$$f = S_0\Delta(1 - u\mathrm{e}^{-rT}) + f_u\mathrm{e}^{-rT}\ .$$

Das Ersetzen von Δ gemäß Gleichung (12.1) ergibt

$$f = S_0\left(\frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}\right)(1 - u\mathrm{e}^{-rT}) + f_u\mathrm{e}^{-rT}\ ,$$

bzw.

$$f = \frac{f_u(1 - d\mathrm{e}^{-rT}) + f_d(u\mathrm{e}^{-rT} - 1)}{u - d}$$

und schließlich

$$f = \mathrm{e}^{-rT}\left[pf_u + (1 - p)f_d\right]\ , \qquad (12.2)$$

wobei

$$p = \frac{\mathrm{e}^{rT} - d}{u - d} \qquad (12.3)$$

gilt.

Die Gleichungen (12.2) und (12.3) ermöglichen die Bewertung einer Option, wenn die Aktienkursbewegungen durch ein Einperioden-Binomialmodell beschrieben werden. Als einzige Bedingung wird die Abwesenheit von Arbitragemöglichkeiten benötigt.

Im oben betrachteten Zahlenbeispiel (siehe Abbildung 12.1) nahmen wir an, dass $u = 1{,}1$, $d = 0{,}9$, $r = 0{,}12$, $T = 0{,}25$, $f_u = 1$ und $f_d = 0$.

Aus Gleichung (12.3) folgt

$$p = \frac{\mathrm{e}^{0{,}12\cdot 3/12} - 0{,}9}{1{,}1 - 0{,}9} = 0{,}6523$$

und aus Gleichung (12.2)

$$f = \mathrm{e}^{-0{,}12\cdot 0{,}25}(0{,}6523 \cdot 1 + 0{,}3477 \cdot 0) = 0{,}633\ .$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem weiter oben erhaltenen Wert überein.

Irrelevanz der erwarteten Aktienrendite

Die Formel für die Optionsbewertung in Gleichung (12.2) enthält keine Wahrscheinlichkeiten für des Steigen oder Fallen des Aktienkurses. Beispielsweise erhalten wir den gleichen Optionspreis, wenn die Wahrscheinlichkeit eines Anstiegs 0,5 oder aber 0,9 beträgt. Dies ist überraschend und nicht ohne weiteres nachvollziehbar. Es ist ganz natürlich anzunehmen, dass der Wert einer Kaufoption auf eine Aktie steigt und der Wert einer Verkaufsoption auf eine Aktie sinkt, wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ansteigens des Aktienkurses zunimmt. Dies ist aber nicht der Fall.

Der entscheidende Grund hierfür ist, dass wir die Optionen nicht isoliert bewerten. Wir berechnen ihren Wert im Hinblick auf den Kurs der zugrunde liegenden Aktie. Die Wahrscheinlichkeiten zukünftiger Auf- und Abwärtsbewegungen sind bereits im Aktienkurs berücksichtigt. Es stellt sich heraus, dass wir sie nicht erneut berücksichtigen müssen, wenn wir die Option hinsichtlich des Aktienkurses bewerten.

12.2 Risikoneutrale Bewertung

Wir sind nun in der Lage, ein sehr wichtiges Prinzip für die Bewertung von Derivaten einzuführen – die *risikoneutrale Bewertung*. Diese besagt, dass wir bei der Bewertung eines Derivates die Annahme treffen können, dass sich die Anleger *risikoneutral* verhalten. Diese Annahme bedeutet, dass die Anleger keine höhere Rendite nachfragen, um ein eventuell höheres Risiko einer bestimmten Investition auszugleichen. Eine Welt mit risikoneutralen Anlegern wird als *risikoneutrale Welt* bezeichnet. Unsere Welt ist selbstverständlich nicht risikoneutral. Je höher die Risiken sind, welche von Anlegern eingegangen werden, desto höher sind auch die von ihnen nachgefragten Renditen. Es zeigt sich jedoch, dass die Annahme einer risikoneutralen Welt den korrekten Optionspreis sowohl für unsere Welt als auch für die risikoneutrale Welt liefert. Auf fast schon wundersame Weise wird damit auch das Problem gelöst, dass wir kaum etwas über die Risikoaffinitäten der Optionskäufer und -verkäufer wissen können.

Auf den ersten Blick wirkt die risikoneutrale Bewertung ziemlich überraschend. Optionen sind eigentlich risikobehaftete Anlagen. Sollten dann nicht auch bei der Bewertung die Risikopräferenzen der jeweiligen Anleger eine Rolle spielen? Es zeigt sich, dass die Risikopräferenzen bei der Bewertung einer Option auf der Grundlage des zugrunde liegenden Aktienkurses keine Bedeutung besitzen. Wenn die Anleger zunehmend risikoscheu werden, sinken die Aktienkurse, doch die Formeln zur Ermittlung des Optionspreise mit Hilfe der Aktienkurse bleiben dieselben.

Eine risikoneutrale Welt besitzt zwei Eigenschaften, welche die Bewertung von Derivaten vereinfachen:

1. Die erwartete Rendite auf eine Aktie (oder auf eine andere Anlage) ist der risikolose Zinssatz.
2. Der Diskontierungssatz für die erwartete Auszahlung aus einer Option (oder aus einer anderen Anlage) ist ebenfalls der risikolose Zinssatz.

In Gleichung (12.2) sollte man die Variable p in Gleichung (12.2) als die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung des Aktienkurses in einer risikoneutralen Welt interpretieren. Die Variable $1-p$ entspricht dann der Wahrscheinlichkeit einer

Abwärtsbewegung in jener Welt, und der Ausdruck

$$pf_u + (1-p)f_d$$

ist die erwartete zukünftige Auszahlung der Option in der risikoneutralen Welt. Dann sagt Gleichung (12.2) aus, dass der heutige Wert der Option ihrem erwarteten zukünftigen Wert in einer risikoneutralen Welt, diskontiert mit dem risikolosen Zinssatz, entspricht. Dies ist eine Anwendung des Prinzips der risikoneutralen Bewertung.

Um die Gültigkeit unserer Interpretation von p nachzuweisen, bemerken wir Folgendes: Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Kursanstiegs mit p angenommen wird, ist der erwartete Aktienkurs $E(S_T)$ zum Zeitpunkt T gegeben durch

$$E(S_T) = pS_0u + (1-p)S_0d$$

oder

$$E(S_T) = pS_0(u-d) + S_0d\ .$$

Durch Ersetzen von p gemäß Gleichung (12.3) erhalten wir

$$E(S_T) = S_0\,\mathrm{e}^{rT}\ , \tag{12.4}$$

was zeigt, dass der Aktienkurs im Durchschnitt mit dem risikolosen Zins wächst, wenn p die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung angibt. Mit anderen Worten: Der Aktienkurs verhält sich genau so, wie wir es in einer risikoneutralen Welt von ihm erwarten würden, wenn p die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung angibt.

Die risikoneutrale Bewertung ist ein wichtiges allgemeines Prinzip der Bewertung von Derivaten. Dieses Prinzip sagt aus, dass wir bei der Annahme einer risikoneutralen Welt für die Bewertung eines Derivats den Preis für das Derivat für alle Welten, nicht nur für die risikoneutrale Welt, erhalten. Wir haben gezeigt, dass die risikoneutrale Bewertung korrekt ist, wenn ein einfaches Binomialmodell für die Entwicklung der Aktienkurse angenommen wird. Es lässt sich sogar zeigen, dass das Resultat unabhängig von den Annahmen über die Aktienkursentwicklung zutrifft.

Wenn wir die risikoneutrale Bewertung zur Bepreisung eines Derivats verwenden, berechnen wir zunächst die Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Resultate, falls die Welt risikoneutral wäre. Dann berechnen wir die erwartete Auszahlung des Derivats und diskontieren diese mit dem risikolosen Zinssatz.

Weitere Überlegungen zum Einperioden-Binomialmodell

Wir kehren nun zum Beispiel in Abbildung 12.1 zurück und zeigen, dass die risikoneutrale Bewertung zum gleichen Ergebnis führt wie No-Arbitrage-Argumente. In Abbildung 12.1 beträgt der gegenwärtige Aktienkurs 20 \$ und bewegt sich zum Ende der drei Monate entweder aufwärts auf 22 \$ oder abwärts auf 18 \$. Die betrachtete Option ist ein europäischer Call mit einem Basispreis von 21 \$ und einem Verfalltermin in drei Monaten. Der risikolose Zinssatz beträgt 12% pro Jahr.

Wir definieren p als die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung des Aktienkurses in einer risikoneutralen Welt. Wir können p aus Gleichung (12.3) berechnen. Alternativ können wir argumentieren, dass in einer risikoneutralen Welt die erwartete Rendite einer Aktie dem risikolosen Zins von 12% entsprechen muss. Das heißt, p muss

$$22p + 18(1-p) = 20\,\mathrm{e}^{0{,}12\cdot 3/12}$$

bzw.

$$4p = 20\,e^{0{,}12\cdot 3/12} - 18$$

erfüllen. Daraus folgt $p = 0{,}6523$.

Am Ende der drei Monate hat die Kaufoption mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6523 den Wert eins und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3477 den Wert null. Ihr erwarteter Wert beträgt daher

$$0{,}6523 \cdot 1 + 0{,}3477 \cdot 0 = 0{,}6523\ .$$

In einer risikoneutralen Welt sollte dieser Erwartungswert mit dem risikolosen Zinssatz diskontiert werden. Der heutige Wert der Option ist deshalb $0{,}6523\,e^{-0{,}12\cdot 3/12}$ oder 0,633 $.

Dies ist derselbe Wert, den wir weiter oben erhalten haben, was zeigt, dass No-Arbitrage-Argumente und die risikoneutrale Bewertung zum selben Ergebnis führen.

Reale Welt versus risikoneutrale Welt

Es sollte hervorgehoben werden, dass p die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung in einer risikoneutralen Welt ist. Im Allgemeinen entspricht dies nicht der Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung in der realen Welt. In unserem Beispiel ist $p = 0{,}6523$. Wenn die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung 0,6523 ist, entspricht die erwartete Rendite der Aktie dem risikolosen Zins von 12%. Angenommen, die erwartete Rendite der Aktie in der realen Welt beträgt 16% und p^* ist die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung in der realen Welt, dann folgt

$$22p^* + 18(1 - p^*) = 20\,e^{0{,}16\cdot 3/12}$$

und damit $p^* = 0{,}7041$.

Die erwartete Auszahlung aus der Option in der realen Welt beträgt dann

$$p^* \cdot 1 + (1 - p^*) \cdot 0\ .$$

Dies ist 0,7041. Leider ist es nicht einfach, den korrekten Diskontierungssatz zu ermitteln, der für die erwartete Auszahlung in der realen Welt gilt. Die am Markt nachgefragte Aktienrendite beträgt 16% und genau dieser Diskontierungssatz würde für die erwarteten Cash Flows aus dieser Anlage verwendet werden. Eine Position in einer Kaufoption ist riskanter als eine Position in einer Aktie. Demzufolge ist der für die Auszahlung aus dem Call anzuwendende Diskontierungssatz größer als 16%. Ohne den Optionswert zu kennen, können wir nicht wissen, wie viel größer als 16% der Diskontierungssatz sein sollte.[1] Die Verwendung der risikoneutralen Bewertung ist zweckmäßig, da wir wissen, dass in der risikoneutralen Welt die Rendite auf alle Vermögensgegenstände (und damit der Diskontierungssatz, der auf alle erwarteten Auszahlungen anzuwenden ist) der risikolose Zinssatz ist.

1 Weil wir wissen, dass der korrekte Wert der Option 0,633 ist, können wir schlussfolgern, dass der korrekte Diskontierungssatz in der realen Welt 42,58% beträgt. Dies ist der Fall, da $0{,}633 = 0{,}7041\,e^{-0{,}4258\cdot 3/12}$.

12.3 Zweiperiodige Binomialbäume

Wir können die Analyse auf zweiperiodige Binomialbäume, wie in Abbildung 12.3 gezeigt, ausdehnen. Hier beginnt der Aktienkurs bei 20 $ und in jedem der beiden Schritte steigt oder fällt er um 10%. Jeder Zeitschritt ist drei Monate lang und der risikolose Zinssatz beträgt 12% per annum. Wie vorhin betrachten wir eine Option mit einem Basispreis von 21 $.

Das Ziel der Analyse ist die Berechnung des Optionspreises am Anfangsknoten des Baumes. Dies kann durch Wiederholung der weiter oben beschriebenen Schritte erreicht werden. Abbildung 12.4 zeigt denselben Baum wie Abbildung 12.3, jedoch mit Angabe sowohl des Aktienkurses als auch des Optionspreises an jedem Knoten. (Der Aktienkurs entspricht der oberen Zahl, der Optionspreis ist darunter angegeben.) Die Optionspreise an den Endknoten des Baumes sind einfach zu berechnen. Sie entsprechen den Auszahlungen der Option. Am Knoten D ist der Aktienkurs 24,2 und der Optionspreis $24{,}2 - 21 = 3{,}2$; an den Knoten E und F ist die Option aus dem Geld und ihr Wert folglich null.

Am Knoten C ist der Optionspreis null, denn Knoten C führt entweder zum Knoten E oder zum Knoten F und an diesen beiden Knoten ist der Optionspreis null. Wir berechnen den Optionspreis am Knoten B, indem wir uns auf den in der Abbildung 12.5 gezeigten Teil des Baumes konzentrieren. Mit der weiter oben im Kapitel eingeführten Notation gilt $u = 1{,}1$, $d = 0{,}9$, $r = 0{,}12$ und $T = 0{,}25$, sodass $p = 0{,}6523$ ist. Aus Gleichung (12.2) ergibt sich der Wert der Option am Knoten B als

$$e^{-0{,}12\cdot 3/12}(0{,}6523 \cdot 3{,}2 + 0{,}3477 \cdot 0) = 2{,}0257\ .$$

Es verbleibt die Berechnung des Optionspreises am Anfangsknoten A. Wir konzentrieren uns dabei auf den ersten Zeitschritt des Baumes. Wir wissen, dass der Wert der Option am Knoten B 2,0257 beträgt und am Knoten C null ist. Mit Glei-

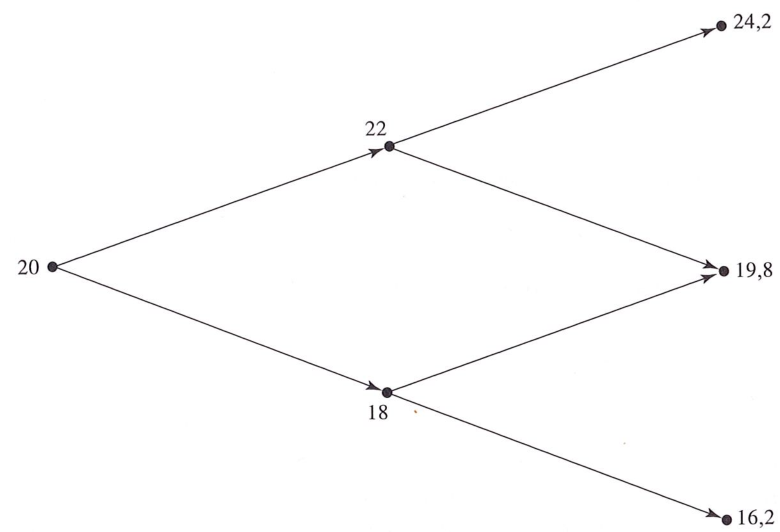

Abbildung 12.3: Aktienkurse in einem zweiperiodigen Binomialbaum

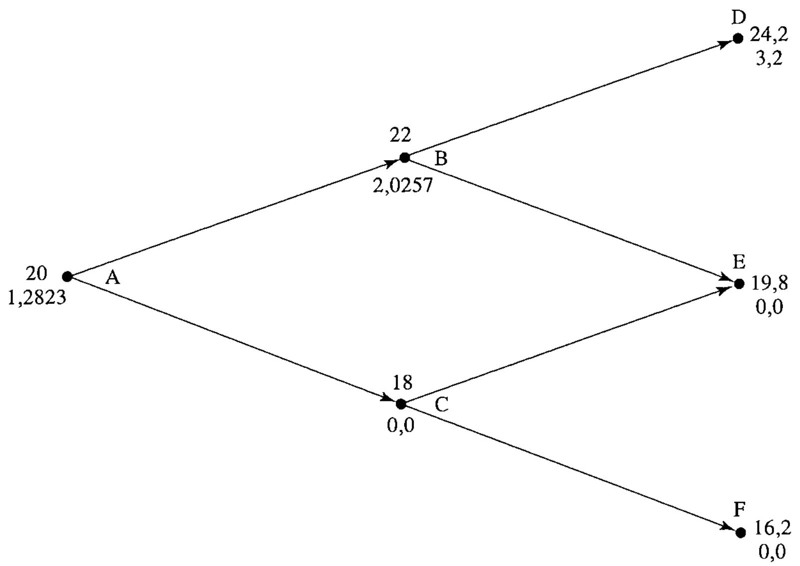

Abbildung 12.4: Aktien- und Optionspreise in einem zweiperiodigen Baum. Die obere Zahl an jedem Knoten gibt den Aktienkurs an; die untere Zahl entspricht dem Optionspreis

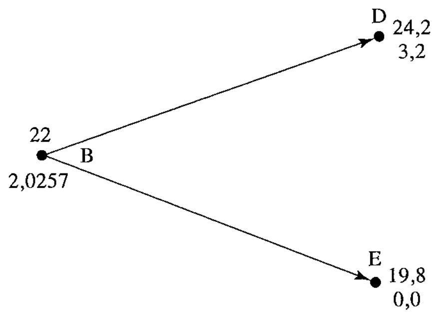

Abbildung 12.5: Ermittlung des Optionspreises an Knoten B in Abbildung 12.4

chung (12.2) ergibt sich folglich der Wert am Knoten A mit

$$e^{-0,12\cdot 3/12}(0,6523\cdot 2,0257+0,3477\cdot 0)=1,2823\ .$$

Der Wert der Option ist 1,2823 $.

Dieses Beispiel war so konstruiert, dass u und d (die relativen Auf- und Abwärtsbewegungen) an jedem Knoten des Baumes gleich sind und dass die Zeitschritte die gleiche Länge aufweisen. Als Ergebnis erhalten wir, dass die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit p, die mit Gleichung (12.3) berechnet wurde, an allen Knoten gleich ist.

Verallgemeinerung

Wir können den Fall von zwei Zeitschritten verallgemeinern, wenn wir die Situation in Abbildung 12.6 betrachten. Der Aktienkurs ist zu Beginn S_0. In jedem Schritt steigt er entweder auf das u-fache oder fällt auf das d-fache des vorangegangenen Wertes. Die Notation für den Wert der Option ist im Baum aufgezeigt. (Beispielsweise ist nach zwei Aufwärtsschritten der Wert der Option f_{uu}.) Wir nehmen an, dass der risikolose Zinssatz r ist und dass die Länge der Zeitschritte Δt Jahre beträgt.

Da die Länge eines Zeitschritts jetzt Δt und nicht T beträgt, werden die Gleichungen (12.2) und (12.3) zu

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d] \tag{12.5}$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}\ . \tag{12.6}$$

Die wiederholte Anwendung von Gleichung (12.5) ergibt

$$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}] \tag{12.7}$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \tag{12.8}$$

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d]\ . \tag{12.9}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (12.7) und (12.8) in Gleichung (12.9) erhalten wir

$$f = e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]\ . \tag{12.10}$$

Dies steht im Einklang mit dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung, das wir weiter oben erwähnt haben. Die Variablen p^2, $2p(1-p)$ und $(1-p)^2$ entsprechen

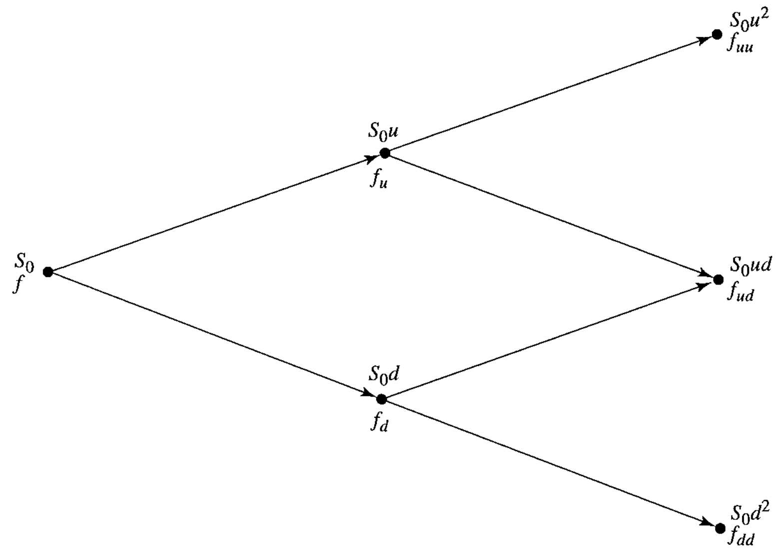

Abbildung 12.6: Aktienkurs und Optionspreis in einem allgemeinen Zweiperioden-Baum

den Wahrscheinlichkeiten, dass der obere, der mittlere oder der untere Endknoten erreicht wird. Der Optionspreis ist gleich der erwarteten Auszahlung in einer risikoneutralen Welt, diskontiert mit dem risikolosen Zinssatz.

Auch wenn wir weitere Schritte zum Binomialbaum hinzufügen, bleibt das Prinzip der risikoneutralen Bewertung gültig. Der Optionspreis ist immer gleich der erwarteten Auszahlung in einer risikoneutralen Welt, diskontiert mit dem risikolosen Zinssatz.

12.4 Beispiel für einen Put

Die in diesem Kapitel beschriebenen Verfahren können verwendet werden, um jedes beliebige Derivat zu bewerten, das von einer Aktie abhängt, deren Kursänderungen binomialverteilt sind. Betrachten wir eine europäische Verkaufsoption auf eine Aktie mit einer Laufzeit von zwei Jahren und einem Basispreis von 52 \$, deren aktueller Kurs 50 \$ beträgt. Wir nehmen an, dass es sich um zwei Zeitschritte von einem Jahr handelt und in jedem Schritt der Aktienkurs entweder um einen Prozentsatz von 20% steigt oder fällt. Wir nehmen außerdem an, dass der risikolose Zins 5% beträgt.

Der Baum ist in Abbildung 12.7 dargestellt. In diesem Fall ist $u = 1{,}2$, $d = 0{,}8$, $\Delta t = 1$ und $r = 0{,}05$. Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit p ist gemäß Gleichung (12.6) gegeben durch

$$p = \frac{e^{0{,}05 \cdot 1} - 0{,}8}{1{,}2 - 0{,}8} = 0{,}6282 \,.$$

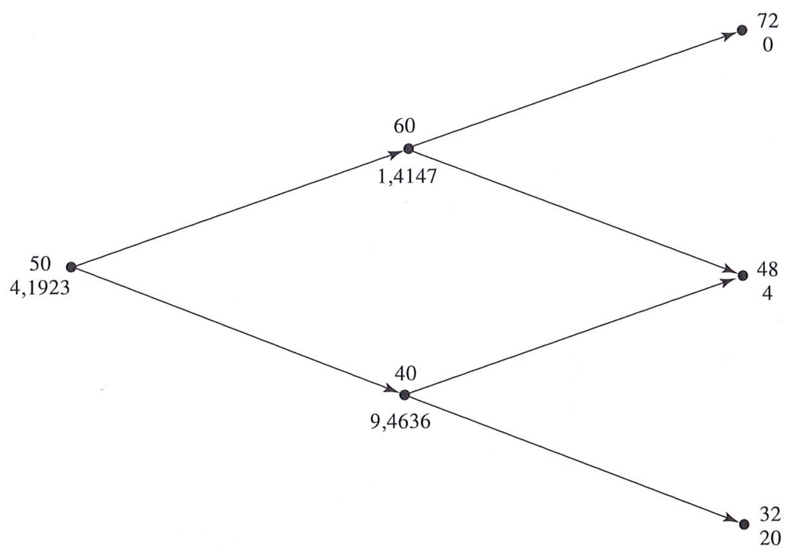

Abbildung 12.7: Verwendung eines Zweiperioden-Baumes zur Bewertung einer europäischen Verkaufsoption. An jedem Knoten entspricht die obere Zahl dem Aktienkurs und die untere dem Optionspreis.

Die möglichen Aktienkurse bei Fälligkeit sind 72 \$, 48 \$ und 32 \$. In diesem Fall sind $f_{uu} = 0$, $f_{ud} = 4$ und $f_{dd} = 20$. Aus Gleichung (12.10) folgt

$$f = e^{-2 \cdot 0{,}05 \cdot 1}(0{,}6282^2 \cdot 0 + 2 \cdot 0{,}6282 \cdot 0{,}3718 \cdot 4 + 0{,}3718^2 \cdot 20) = 4{,}1923 \,.$$

Der Wert des Puts beträgt 4,1923 \$. Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man Gleichung (12.5) verwendet und sich schrittweise durch den Baum zurückarbeitet. Abbildung 12.7 zeigt die berechneten Optionspreise für alle Knoten des Baumes.

12.5 Amerikanische Optionen

Bisher waren alle betrachteten Optionen europäischen Typs. Wir wollen nun betrachten, wie amerikanische Optionen unter Verwendung von Binomialbäumen wie in den Abbildungen 12.4 und 12.7 bewertet werden können. Das Verfahren besteht darin, sich vom Ende bis zum Anfang des Baumes zurückzuarbeiten und an jedem Knoten zu überprüfen, ob eine vorzeitige Ausübung sinnvoll ist. Der Wert der Option an den Endknoten ist derselbe wie für eine europäische Option. An früheren Knoten ist der Wert der Option das Maximum aus

1. dem durch Gleichung (12.5) angegebenen Wert und
2. der Auszahlung aus der vorzeitigen Ausübung.

Abbildung 12.8 zeigt, wie sich Abbildung 12.7 ändert, wenn die betrachtete Option amerikanischen anstatt europäischen Typs ist. Die Aktienkurse und ihre Wahrscheinlichkeiten bleiben unverändert. Die Werte der Option an den Endknoten bleiben ebenfalls unverändert. Am Knoten B liefert Gleichung (12.5) den Wert 1,4147 für die Option, während die Auszahlung aus einer vorzeitigen Ausübung

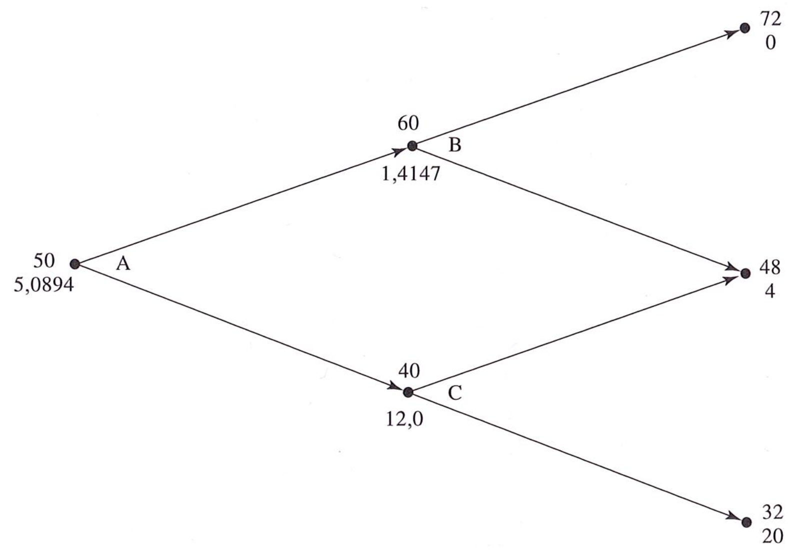

Abbildung 12.8: Verwendung eines Zweiperioden-Baumes zur Bewertung einer amerikanischen Verkaufsoption. An jedem Knoten steht die obere Zahl für den Aktienkurs und die untere für den Optionspreis.

negativ ist (= −8). Offensichtlich ist die vorzeitige Ausübung am Knoten B nicht sinnvoll, und der Wert der Option an diesem Knoten beträgt 1,4147. Am Knoten C liefert Gleichung (12.5) den Wert 9,4636 für die Option, während die Auszahlung bei vorzeitiger Ausübung 12 ist. In diesem Fall ist die vorzeitige Ausübung optimal und der Wert der Option am Knoten beträgt 12. Am Anfangsknoten A ist der durch Gleichung (12.5) gegebene Wert

$$e^{-0,05\cdot 1}(0{,}6282 \cdot 1{,}4147 + 0{,}3718 \cdot 12{,}0) = 5{,}0894$$

und die Auszahlung bei vorzeitiger Ausübung ist 2. In diesem Fall ist die vorzeitige Ausübung nicht optimal. Der Wert der Option ist deshalb 5,0894 $.

12.6 Options-Delta

An dieser Stelle ist die Diskussion des *Delta-Faktors* angebracht, einem wichtigen Parameter (auch als Sensitivitätskennzahl oder *Greek* bezeichnet) bei der Bewertung und der Absicherung (Hedging) von Optionen.

Das Delta (Δ) einer Aktienoption ist das Verhältnis der Änderung des Optionspreises zur Änderung des zugrunde liegenden Aktienkurses. Dieser entspricht der Anzahl an Aktien, die wir für jede Short-Position in einer Option halten sollten, um ein risikoloses Portfolio zu bilden. Er entspricht dem weiter vorn in diesem Kapitel eingeführten Δ. Das Bilden eines risikolosen Portfolios wird manchmal als *Delta-Hedging* bezeichnet. Der Delta-Faktor einer Kaufoption ist positiv, das Delta einer Verkaufsoption dagegen negativ.

Aus Abbildung 12.1 können wir den Delta-Faktor der betrachteten Kaufoption zu

$$\frac{1-0}{22-18} = 0{,}25$$

berechnen. Dies gilt, weil sich im Falle einer Änderung des Aktienkurses von 18 $ auf 22 $ der Optionspreis von 0 $ auf 1 $ ändert. Der Wert entspricht dem Δ, welches wir in Abschnitt 12.1 berechnet haben.

In Abbildung 12.4 ist der zu den Aktienkursbewegungen im ersten Zeitschritt gehörige Delta-Faktor

$$\frac{2{,}0257-0}{22-18} = 0{,}5064\ .$$

Der Delta-Faktor für die Aktienkursbewegungen im zweiten Zeitschritt ist

$$\frac{3{,}2-0}{24{,}2-19{,}8} = 0{,}7273\ ,$$

falls es im ersten Zeitabschnitt eine Aufwärtsbewegung gibt, und

$$\frac{0-0}{19{,}8-16{,}2} = 0\ ,$$

falls es im ersten Zeitabschnitt eine Abwärtsbewegung gibt.

Nach Abbildung 12.7 ist das Delta am Ende des ersten Zeitschritts

$$\frac{1{,}4147-9{,}4636}{60-40} = -0{,}4024$$

und am Ende des zweiten Zeitschritts entweder

$$\frac{0-4}{72-48} = -0{,}1667$$

oder

$$\frac{4-20}{48-32} = -1{,}0000\ .$$

Die zweiperiodigen Beispiele zeigen, dass der Delta-Faktor im Zeitablauf variiert. (In Abbildung 12.4 ändert sich Delta von 0,5064 auf entweder 0,7273 oder 0; in Abbildung 12.7 ändert es sich von −0,4024 auf entweder −0,1667 oder −1,000.) Um also ein risikoloses Hedging unter Verwendung einer Option und der zugrunde liegenden Aktie aufrechtzuerhalten, müssen wir unsere Aktienbestände regelmäßig anpassen. Dies ist eine Eigenschaft von Optionen, die wir in Kapitel 18 noch einmal ansprechen werden.

12.7 Anpassung von *u* und *d* an die Volatilität

Wenn wir einen Binomialbaum zur Darstellung der Bewegungen eines Aktienkurses konstruieren, dann wählen wir die Parameter u und d so, dass sie zur Volatilität des Aktienkurses passen. Die Frage ist nur, ob wir dazu die Volatilität in der realen Welt oder die Volatilität in der risikoneutralen Welt heranziehen sollen. Wie wir nun zeigen werden, spielt es keine Rolle. Für kleine Δt und bestimmte Werte von u und d ist die anzunehmende Volatilität in Realwelt und risikoneutraler Welt gleich.

Abbildung 12.9a zeigt die Bewegungen des Aktienkurses in einem Zeitschritt eines Binomialbaumes in der realen Welt, Abbildung 12.9b zeigt diese Bewegungen in

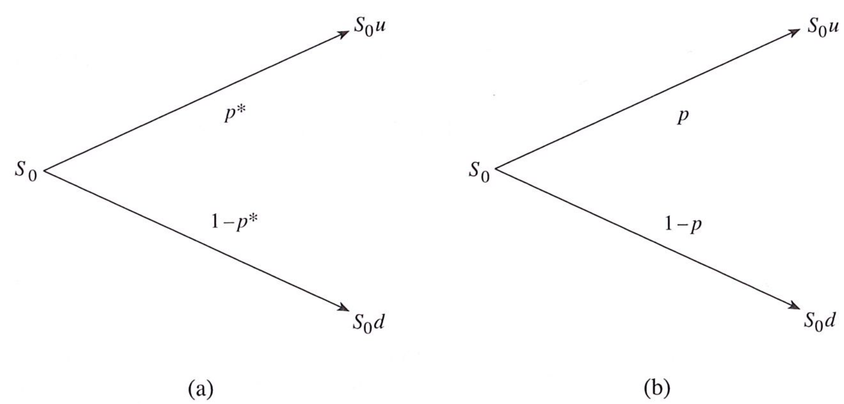

Abbildung 12.9: Änderung des Aktienkurses in der Zeit Δt in der realen Welt (a) und in der risikoneutralen Welt (b)

der risikoneutralen Welt. Die Schrittlänge ist Δt. Der Aktienkurs startet bei S_0 und bewegt sich entweder nach oben auf $S_0 u$ oder nach unten auf $S_0 d$. Das sind die beiden einzigen möglichen Ergebnisse sowohl in der realen als auch in der risikoneutralen Welt. Die Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung in der realen Welt wird mit p^* bezeichnet. In der risikoneutralen Welt bezeichnet, entsprechend unserer bereits verwendeten Notation, p diese Wahrscheinlichkeit.

Der erwartete Aktienkurs am Ende des ersten Zeitschritts ist in der realen Welt $S_0 e^{\mu \Delta t}$, wobei μ die erwartete Rendite bezeichnet. In dem Baum ist der erwartete Aktienkurs zu diesem Zeitpunkt

$$p^* S_0 u + (1 - p^*) S_0 d .$$

Um die Parameter des Binomialbaumes an die erwartete Rendite der Aktie anzupassen, setzen wir

$$p^* S_0 u + (1 - p^*) S_0 d = S_0 e^{\mu \Delta t}$$

oder

$$p^* = \frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u - d} . \qquad (12.11)$$

Wie wir in Kapitel 14 zeigen werden, ist die Volatilität σ des Aktienkurses so definiert, dass $\sigma\sqrt{\Delta t}$ die Standardabweichung der Aktienrendite in einem kurzen Zeitabschnitt der Länge Δt angibt. Entsprechend ist die Varianz der Rendite $\sigma^2 \Delta t$. Im Baum in Abbildung 12.9a entspricht die Varianz der Aktienrendite[2]

$$p^* u^2 + (1 - p^*) d^2 - \left[p^* u + (1 - p^*) d\right]^2 .$$

Wegen der Angleichung der Parameter des Baumes an die Volatilität des Aktienkurses gilt

$$p^* u^2 + (1 - p^*) d^2 - [p^* u + (1 - p^*) d]^2 = \sigma^2 \Delta t . \qquad (12.12)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (12.11) in Gleichung (12.12) erhalten wir

$$e^{\mu \Delta t}(u + d) - ud - e^{2\mu \Delta t} = \sigma^2 \Delta t .$$

2 Die Rendite beträgt entweder $u - 1$ oder $d - 1$. Subtraktion der Konstanten 1 von einer Variablen verändert ihre Varianz nicht. Die Varianz der Rendite entspricht daher der Varianz einer Zufallsvariablen die den Wert u mit Wahrscheinlichkeit p^* und den Wert d mit Wahrscheinlichkeit $1 - p^*$ annimmt. Die Varianz einer Variablen X ist $E(X^2) - [E(X)]^2$, wobei E den Erwartungswert bezeichnet.

Vernachlässigt man die Terme in Δt^2 und die höheren Potenzen von Δt, so lautet eine Lösung dieser Gleichung[3]

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} .$$

Hierbei handelt es sich um jene Werte für u und d, die bereits von Cox, Ross und Rubinstein (1979) für die Anpassung an die Volatilität vorgeschlagen wurden.

In Abb. 12.9b ist der erwartete Aktienkurs am Ende des Zeitschritts $S_0 e^{r \Delta t}$, wie auch in Gleichung (12.4) gezeigt. Die Varianz der Aktienrendite ist

$$pu^2 + (1 - p)d^2 - [pu + (1 - p)d]^2 = [e^{r \Delta t}(u + d) - ud - e^{2r \Delta t}] .$$

Setzen wir $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ und $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ein, so stellen wir fest, dass dies $\sigma^2 \Delta t$ entspricht, falls Terme in Δt^2 und höhere Potenzen von Δt vernachlässigt werden.

Diese Analyse zeigt, dass sich die erwartete Rendite der Aktie beim Übergang von der realen zur risikoneutralen Welt ändert, aber die Volatilität gleich bleibt (zumindest unter der Bedingung, dass Δt gegen null geht). Dies veranschaulicht ein wichtiges allgemeines Ergebnis, das als *Girsanov-Theorem* bekannt ist. Wenn wir uns von einer Welt mit bestimmten Risikopräferenzen zu einer anderen Welt mit anderen Risikopräferenzen bewegen, verändern sich die erwarteten Wachstumsraten in den Variablen, aber ihre Volatilitäten bleiben dieselben. In Kapitel 27 werden wir den Einfluss von Risikopräferenzen auf das Verhalten der Marktvariablen genauer untersuchen. Der Wechsel von Risikopräferenzen wird mitunter als *Maßwechsel* bezeichnet. Das Maß für die reale Welt wird gelegentlich als *P-Maß* bezeichnet, während das Maß für die risikoneutrale Welt als *Q-Maß* bezeichnet wird.[4]

12.8 Die Formeln für Binomialbäume

Die Analyse im vorigen Abschnitt zeigt, dass wir die Anpassung an die Volatilität erreichen, indem wir für Zeitschritte der Länge Δt die Parameter

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad (12.13)$$

und

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad (12.14)$$

3 Hierbei verwenden wir die Reihenentwicklung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

4 Mit unserer Notation stellt p die Wahrscheinlichkeit unter dem Q-Maß dar und p^* die Wahrscheinlichkeit unter dem P-Maß.

setzen. Aus Gleichung (12.6) haben wir

$$p = \frac{a-d}{u-d}\,, \tag{12.15}$$

wobei

$$a = e^{r\Delta t}\,. \tag{12.16}$$

Die Gleichungen Gleichung (12.13)–Gleichung (12.16) definieren den Binomialbaum.

Wir betrachten noch einmal den amerikanischen Put in Abbildung 12.8 mit Aktienkurs 50 \$, Basispreis 52 \$, risikolosem Zinssatz 5%, Optionslaufzeit zwei Jahre und zwei Zeitschritten (also $\Delta t = 1$). Die Volatilität σ betrage 30%. Dann gilt mit Gleichung (12.13) bis Gleichung (12.16)

$$u = e^{0{,}3\cdot 1} = 1{,}3499\,, \quad d = \frac{1}{1{,}3499} = 0{,}7408\,, \quad a = e^{0{,}05\cdot 1} = 1{,}0513$$

sowie

$$p = \frac{1{,}0513 - 0{,}7408}{1{,}3499 - 0{,}7408} = 0{,}5097\,.$$

Der Baum ist in Abbildung 12.10 dargestellt. Der Wert des Puts ist 7,43. Er unterscheidet sich von dem Wert in Abbildung 12.8, als wir $u = 1{,}2$ und $d = 0{,}8$ angenommen hatten. Man beachte, dass die Option am Ende des ersten Zeitschritts ausgeübt wird, wenn der untere Knoten erreicht wurde.

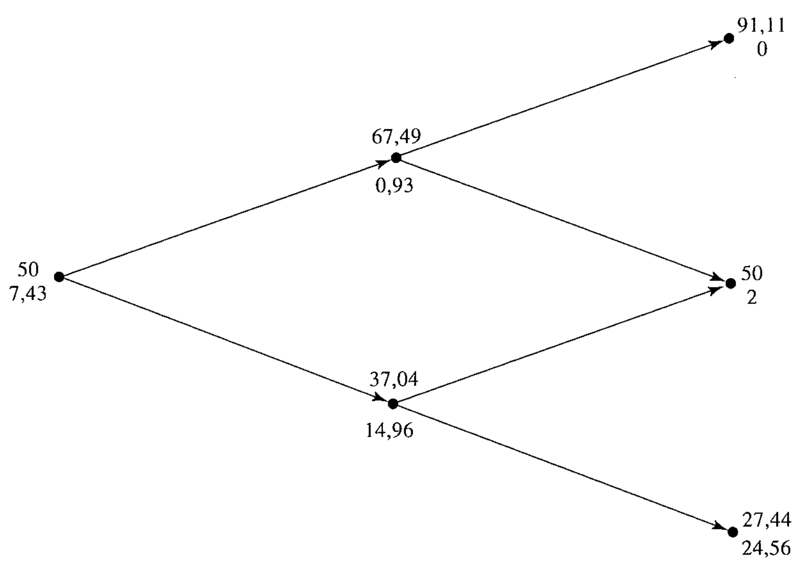

Abbildung 12.10: Zweiperioden-Baum zur Bewertung einer amerikanischen Verkaufsoption mit Aktienkurs 50, einer Restlaufzeit von 2 Jahren, Basispreis 52, risikolosem Zinssatz 5% und Volatilität 30%

12.9 Erhöhung der Anzahl an Zeitschritten

Das oben vorgestellte Binomialmodell ist unrealistisch einfach. Selbstverständlich kann man nur eine sehr grobe Näherung des Optionspreises erwarten, wenn man annimmt, dass die Aktienkursänderungen während der Laufzeit einer Option einem ein- oder zweiperiodigen Binomialmodell folgen.

Wenn in der Praxis Binomialbäume verwendet werden, wird die Laufzeit der Option typischerweise in 30 oder mehr Zeitschritte zerlegt. In jedem einzelnen Zeitschritt gibt es eine binomiale Aktienkursbewegung. 30 Zeitschritte bedeuten, dass 31 Endknoten von Aktienkursen und 2^{30}, oder etwa eine Milliarde, mögliche Pfade des Aktienkurses betrachtet werden.

Die den Baum bestimmenden Gleichungen sind Gleichung (12.13) bis Gleichung (12.16), unabhängig von der Anzahl der Zeitschritte. Nehmen wir beispielsweise an, dass es in dem Beispiel in Abbildung 12.10 fünf statt zwei Schritte gibt. Die Parameter wären dann $\Delta t = 2/5 = 0{,}4$, $r = 0{,}05$ und $\sigma = 0{,}3$. Mit diesen Werten ergibt sich $u = e^{0{,}3\cdot\sqrt{0{,}4}} = 1{,}2089$, $d = 1/1{,}2089 = 0{,}8272$, $a = e^{0{,}05\cdot 0{,}4} = 1{,}0202$ und $p = (1{,}0202 - 0{,}8272)/(1{,}2089 - 0{,}8272) = 0{,}5056$.

Wenn die Anzahl der Zeitschritte erhöht (und Δt kleiner wird, trifft das Binomialbaummodell die gleichen Annahmen über das Verhalten des Aktienkurses wie das Black-Scholes-Merton-Modell, welches in Kapitel 14 behandelt wird. Wenn der Binomialbaum zur Bepreisung einer europäischen Option verwendet wird, konvergiert der Preis erwartungsgemäß mit steigender Anzahl an Zeitschritten gegen den Black-Scholes-Merton-Preis. Dies wird im Anhang an dieses Kapitel bewiesen.

12.10 Verwendung von DerivaGem

DerivaGem, die Software zum Buch, ist ein nützliches Hilfsmittel, um sich mit Binomialbäumen vertraut zu machen. Nach dem Einrichten der Software auf dem am Ende des Buches beschriebenem Wege öffnen Sie das Tabellenblatt *Equity_FX_Index_Futures_Options*. Wählen Sie *Equity* als Underlying und *Binomial American* als Optionstyp. Geben Sie für Stock Price, Volatility, Risk-free Rate, Time to Expiration, Exercise Price und Time Steps die Werte 50, 30%, 5%, 2, 52 bzw. 2 ein. Klicken Sie auf *Put* und dann auf *Calculate*. In der mit *Price* bezeichneten Zelle erscheint der Optionspreis 7,428. Wenn Sie nun auf *Display Tree* klicken, sehen Sie das Äquivalent zu Abbildung 12.10. (Die roten Zahlen markieren die Knoten, an denen die Option ausgeübt wird.)

Kehren Sie jetzt zum Tabellenblatt *Equity_FX_Index_Futures_Options* zurück und ändern Sie die Anzahl der Zeitschritte in 5. Betätigen Sie die Eingabetaste und klicken Sie dann auf *Calculate*. Sie werden feststellen, dass sich der Optionswert auf 7,671 ändert. Über *Display Tree* wird der Fünfperioden-Baum angezeigt, zusammen mit den oben berechneten Werten für u, d, a und p. Bäume mit bis zu zehn Zeitschritten können von DerivaGem grafisch dargestellt werden, Berechnungen können sogar für bis zu 500 Zeitschritte durchgeführt werden. In unserem Beispiel ergeben 500 Schritte einen auf zwei Nachkommastellen gerundeten Optionspreis von 7,47. Dies ist ein ziemlich genauer Wert. Durch Änderung des Optionstyps in Binomial European lässt sich der Baum zur Bewertung einer europäischen Option benutzen. Die Verwendung von 500 Zeitschritten ergibt für eine europäische Option mit denselben Parametern wie für die amerikanische Option einen Wert von 6,76. (Durch