In den frühen 1970er Jahren gelang Fischer Black, Myron Scholes und Robert Merton ein entscheidender Durchbruch bei der Bewertung von europäischen Aktienoptionen.[1] *Sie entwickelten eine später als Black-Scholes-Merton-Modell (oder Black-Scholes-Modell) bekannt gewordene Bewertungsmethodik. Dieses Modell hatte einen großen Einfluss auf die Bewertung und das Hedging von Derivaten durch die Marktteilnehmer. Im Jahre 1997 wurde die Bedeutung des Modells gewürdigt, indem Robert Merton und Myron Scholes der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften verliehen wurde. Leider verstarb Fischer Black im Jahre 1995, sonst hätte er zweifellos ebenso zu den Preisträgern gehört.*

Wie erreichten Black, Scholes und Merton ihr bahnbrechendes Resultat? Forscher hatten auch schon davor ähnliche Annahmen getroffen und die erwartete Auszahlung aus einer europäischen Option korrekt berechnet. Es ist jedoch, wie wir in Abschnitt 12.2 erläutert haben, alles andere als einfach, den korrekten Diskontierungssatz für diese Auszahlung anzugeben. Black und Scholes benutzten das Capital Asset Pricing Model (siehe Anhang zu Kapitel 3), um zwischen der am Markt nachgefragten Optionsrendite und der nachgefragten Aktienrendite einen Zusammenhang herzustellen. Dies gestaltete sich schwierig, da die Beziehung sowohl vom Aktienkurs als auch von der Zeit abhängt. Mertons Ansatz unterschied sich von den Überlegungen von Black und Scholes. Er stellte ein risikoloses Portfolio aus Option und zugrunde liegender Aktie zusammen und argumentierte, dass die Rendite dieses Portfolios über einen kurzen Zeitraum dem risikolosen Zinssatz entsprechen muss. Dieser Ansatz entspricht unserem Vorgehen in Abschnitt 12.1 – ist allerdings komplizierter, da sich das Portfolio im Zeitablauf stetig verändert. Mertons Verfahren stellte einen allgemeineren Ansatz dar, da es im Gegensatz zum Black-Scholes-Verfahren nicht die Annahmen des Capital Asset Pricing Models benötigte.

In diesem Kapitel befassen wir uns mit Mertons Ansatz zur Herleitung des Black-Scholes-Merton-Modells. Wir erläutern, wie die Volatilität entweder aus historischen Daten oder mithilfe des Modells aus Optionspreisen geschätzt wird. Wir zeigen, wie das in Kapitel 12 vorgestellte Konzept der risikoneutralen Bewertung herangezogen werden kann. Zudem werden Erweiterungen des Black-Scholes-Merton-Modells behandelt, um europäische Kauf- oder Verkaufsoptionen auf Aktien mit Dividendenzahlungen zu bewerten, und wir stellen Ergebnisse zur Bewertung amerikanischer Kaufoptionen auf Aktien mit Dividendenzahlungen vor.

14.1 Die Lognormalverteilung von Aktienkursen

Das von Black, Scholes und Merton verwendete Modell für das Verhalten von Aktienkursen ist genau jenes, das wir in Kapitel 13 vorgestellt haben. Es setzt voraus, dass die relativen Änderungen des Aktienkurses in einer kurzen Zeitspanne normalverteilt sind. Wir definieren:

μ: erwartete Rendite einer Aktie

σ: Volatilität des Aktienkurses

1 Siehe F. Black und M. Scholes, „The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81 (Mai/Juni 1973), 637–659; R.C. Merton, „Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Frühjahr 1973), 141–183.

Der Mittelwert der Rendite im Zeitraum Δt ist $\mu\Delta t$ und die Standardabweichung dieser Rendite beträgt $\sigma\sqrt{\Delta t}$, sodass

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t; \sigma^2\Delta t) \tag{14.1}$$

gilt. Dabei ist ΔS die Änderung des Aktienkurses S in der Zeitspanne Δt und $\phi(m, v)$ die Normalverteilung mit dem Mittelwert m und der Varianz v. (Dies ist Gleichung (13.9).)

Wie in Abschnitt 13.7 gezeigt wurde, folgt aus dem Modell

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T; \sigma^2 T\right] .$$

Daraus folgt

$$\ln\frac{S_T}{S_0} \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T; \sigma^2 T\right] \tag{14.2}$$

und

$$\ln S_T \sim \phi\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T; \sigma^2 T\right] , \tag{14.3}$$

wobei S_T den Aktienkurs zu einem zukünftigen Zeitpunkt T und S_0 den Aktienkurs zum Zeitpunkt null angibt. Gleichung (14.3) zeigt, dass $\ln S_T$ normalverteilt ist, so dass S_T lognormalverteilt ist. Der Mittelwert von $\ln S_T$ beträgt $\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)T$, die Standardabweichung $\sigma\sqrt{T}$.

Beispiel 14.1 Wir betrachten eine Aktie mit einem Basispreis von 40 \$, einer erwarteten Rendite von 16% per annum und einer Volatilität von 20% per annum. Nach Formel (14.3) ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Aktienkurses S_T nach einer Zeit von sechs Monaten gegeben durch

$$\ln S_T \sim \phi[\ln 40 + (0{,}16 - 0{,}2^2/2) \cdot 0{,}5; 0{,}2^2 \cdot 0{,}5]$$
$$\ln S_T \sim \phi(3{,}759; 0{,}02) .$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nimmt die normalverteilte Variable einen Wert innerhalb des 1,96fachen der Standardabweichung um ihren Mittelwert an. In unserem Fall beträgt die Standardabweichung $\sqrt{0{,}02} = 0{,}141$. Folglich gilt mit einer Konfidenz von 95%

$$3{,}759 - 1{,}96 \cdot 0{,}141 < \ln S_T < 3{,}759 + 1{,}96 \cdot 0{,}141 .$$

Dies kann geschrieben werden als

$$e^{3{,}759 - 1{,}96 \cdot 0{,}141} < S_T < e^{3{,}759 + 1{,}96 \cdot 0{,}141}$$

oder

$$32{,}55 < S_T < 56{,}56 .$$

Demzufolge beträgt die Wahrscheinlichkeit 95%, dass der Aktienpreis in sechs Monaten zwischen 32,55 und 56,56 liegen wird.

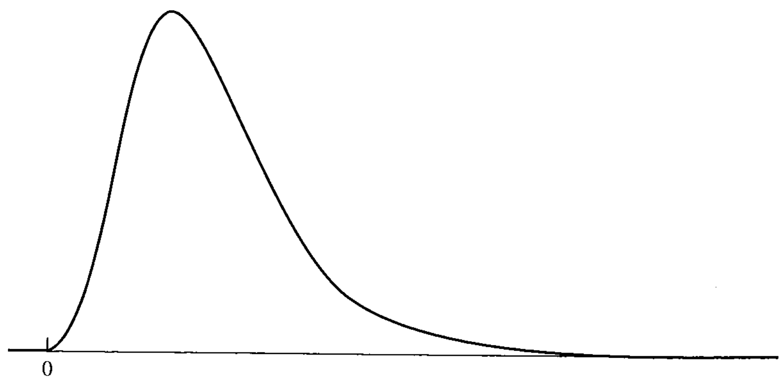

Abbildung 14.1: Die Lognormalverteilung

Eine lognormalverteilte Variable kann jeden Wert zwischen null und unendlich annehmen. Abbildung 14.1 zeigt eine Lognormalverteilung. Im Unterschied zur Normalverteilung ist die Lognormalverteilung schief, d. h. asymmetrisch, und Mittelwert, Median und Modus sind nicht identisch. Aus Gleichung (14.3) sowie den Eigenschaften der Lognormalverteilung kann abgeleitet werden, dass der Erwartungswert $E(S_T)$ von S_T gegeben ist durch

$$E(S_T) = S_0\, e^{\mu T} \,. \tag{14.4}$$

Dies stimmt mit der Definition von μ als erwarteter Rendite überein. Man kann zeigen, dass die Varianz $\mathrm{var}(S_T)$ von S_T durch

$$\mathrm{var}(S_T) = S_0^2\, e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1) \tag{14.5}$$

gegeben ist.[2]

Beispiel 14.2 Wir betrachten eine Aktie mit einem aktuellen Kurs von 20 \$, einer erwarteten Rendite von 20% per annum und einer Volatilität von 40% per annum. Der in einem Jahr erwartete Aktienkurs $E(S_T)$ und die Varianz des Aktienkurses $\mathrm{var}(S_T)$ sind gegeben durch

$$E(S_T) = 20\, e^{0{,}2\cdot 1} = 24{,}43\,, \quad \text{und} \quad \mathrm{var}(S_T) = 400\, e^{2\cdot 0{,}2\cdot 1}(e^{0{,}4^2\cdot 1} - 1) = 103{,}54\,.$$

Die Standardabweichung des Aktienkurses in einem Jahr liegt bei $\sqrt{103{,}54}$ oder 10,18.

2 Zum Beweis der Resultate in den Gleichungen (14.4) und (14.5) siehe Technical Note 2 auf der Homepage des Autors (www.rotman.utoronto.ca/\$\sim\$hull/TechnicalNotes). Eine ausführlichere Diskussion der Eigenschaften der Lognormalverteilung findet sich in J. Aitchison und J.A.C. Brown, *The Lognormal Distribution*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

14.2 Die Verteilung von Aktienrenditen

Die Tatsache, dass die Aktienkurse lognormalverteilt sind, kann zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer bei stetiger Verzinsung zwischen dem Zeitpunkt null und dem Zeitpunkt T erzielten Rendite herangezogen werden. Wir definieren die annualisierte Rendite über diesen Zeitraum von null bis T mit x. Daraus folgt

$$S_T = S_0\, e^{xT}\,,$$

und somit

$$x = \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}\,. \tag{14.6}$$

Aus Formel (14.2) ergibt sich

$$x \sim \phi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2};\, \frac{\sigma^2}{T}\right). \tag{14.7}$$

Demzufolge ist die annualisierte stetige Rendite normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu - \sigma^2/2$ und der Standardabweichung $\sigma/\sqrt{T}$. Mit wachsender Zeit T verringert sich die Standardabweichung von x. Um die Ursache dafür zu verstehen, betrachten wir zwei Fälle: $T = 1$ und $T = 20$. Die durchschnittliche jährliche Rendite über einen Zeitraum von 20 Jahren können wir mit größerer Sicherheit vorhersagen als diejenige für ein einziges Jahr.

Beispiel 14.3 Wir betrachten eine Aktie mit einer erwarteten Rendite von 17% per annum und einer Volatilität von 20% per annum. Die Rendite (bei stetiger Verzinsung) über einen Zeitraum von drei Jahren ist normalverteilt mit dem Mittelwert von

$$0{,}17 - \frac{0{,}2^2}{2} = 0{,}15$$

oder 15% per annum sowie einer Standardabweichung von

$$\frac{0{,}2}{\sqrt{3}} = 0{,}1155$$

oder 11,55% per annum. Da eine normalverteilte Variable mit 95%iger Sicherheit innerhalb der 1,96fachen Standardabweichung um ihren Mittelwert liegt, können wir zu 95% sicher sein, dass die durchschnittliche Rendite über einen Zeitraum von drei Jahren zwischen $15 - 1{,}96 \cdot 11{,}55 = -7{,}6\%$ und $15 + 1{,}96 \cdot 11{,}55 = +37{,}6\%$ pro Jahr liegen wird.

14.3 Die erwartete Rendite

Die erwartete Rendite μ, die von Anlegern für eine Aktie gefordert wird, hängt davon ab, wie riskant die Aktie ist. Je höher das Risiko, um so höher ist die erwartete Rendite. Diese Rendite hängt außerdem vom allgemeinen Zinsniveau in der Volkswirtschaft ab. Je höher das Niveau der Zinssätze ist, um so höher ist die erwartete Rendite für eine beliebige Aktie. Zum Glück müssen wir uns nicht im Detail mit den Determinanten von μ befassen. Es stellt sich heraus, dass der Wert der Aktienoption, wenn er unter Zuhilfenahme des gegenwärtigen Wertes der zugrunde liegenden Aktie ermittelt wird, nicht von μ abhängt. Dessen ungeachtet gibt es einen Aspekt der erwarteten Rendite einer Aktie, der häufig für Verwirrung sorgt und deshalb einer Erklärung bedarf.

Gleichung (14.1) zeigt, dass $\mu\Delta t$ die erwartete relative Änderung des Aktienkurses in einem sehr kurzen Zeitabschnitt Δt ist. Man könnte nun annehmen, dass μ der erwarteten stetigen Rendite für die Aktie entspricht. Dies ist jedoch nicht der Fall. Die bei stetiger Verzinsung über einen relativ langen Zeitabschnitt von T Jahren tatsächlich realisierte Rendite x beträgt mit Gleichung (14.6)

$$x = \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}$$

und wie in Gleichung (14.7) angedeutet, ist der Erwartungswert $E(x)$ von x gleich $\mu - \sigma^2/2$.

Der Grund für die Abweichung der erwarteten stetig verzinsten Rendite von μ ist subtil, aber nicht unbedeutend. Angenommen, wir betrachten eine sehr große Anzahl sehr kleiner Zeitabschnitte der Länge Δt. Wir definieren S_i als den Aktienkurs am Ende des i-ten Intervalls und ΔS_i als $S_{i+1} - S_i$. Unter den Annahmen, die wir für das Verhalten von Aktienkursen getroffen haben, liegt das Mittel der Renditen aus der Aktie für jedes Intervall nahe bei μ. Mit anderen Worten liegt μ dicht am arithmetischen Mittel der $\Delta S_i/S_i$. Die über den Beobachtungszeitraum erwartete Rendite für eine Verzinsungsperiode Δt liegt jedoch dicht bei $\mu - \sigma^2/2$, nicht bei μ.[3] Business Snapshot 14.1 liefert ein numerisches Beispiel aus dem Bereich der Investmentfonds, um diese Aussage zu illustrieren. Zur mathematischen Erklärung beginnen wir mit Gleichung (14.4):

$$E(S_T) = S_0\,e^{\mu T}\,.$$

Durch Logarithmieren erhalten wir

$$\ln[E(S_T)] = \ln(S_0) + \mu T\,.$$

Nun ist man versucht, $\ln[E(S_T)] = E[\ln(S_T)]$ zu setzen, sodass $E[\ln(S_T)] - \ln(S_0) = \mu T$ oder $E[\ln(S_T/S_0)] = \mu T$ wäre, was zu $E(x) = \mu$ führt. Wir können diesen Schritt jedoch nicht durchführen, da ln eine nichtlineare Funktion ist. Tatsächlich ist $\ln[E(S_T)] > E[\ln(S_T)]$, sodass $E[\ln(S_T/S_0)] < \mu T$ gilt, was zu $E(x) < \mu$ führt. (Wie oben erwähnt, gilt $E(x) = \mu - \sigma^2/2$.)

3 Die Ausführungen in diesem Abschnitt zeigen, dass der Begriff *erwartete Rendite* zweideutig ist. Er kann sich entweder auf μ oder auf $\mu - \sigma^2/2$ beziehen. Wenn nichts anderes angegeben ist, wird im gesamten Buch μ als erwartete Rendite bezeichnet.

Business Snapshot 14.1 – Renditeangaben von Investmentfonds können irreführend sein

Der Unterschied zwischen μ und $\mu - \sigma^2/2$ ist eng mit einem Problem bei den Renditeangaben von Investmentfonds verbunden. Im Folgenden ist eine Reihe von jährlichen Renditen für die letzten fünf Jahre aufgeführt, angegeben von einem Fondsmanager (gemessen bei jährlicher Verzinsung): 15%, 20%, 30%, -20%, 25%.

Das durch Summierung der Renditen und Division durch 5 berechnete arithmetische Mittel ist 14%. Tatsächlich würde ein Anleger allerdings weniger als 14% per annum erzielen, wenn er das Geld für fünf Jahre in den Fonds investiert hätte. Der Wert von 100 $ wäre am Ende der fünf Jahre

$$100 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}20 \cdot 1{,}30 \cdot 0{,}80 \cdot 1{,}25 = 179{,}40\,\$\,.$$

Im Gegensatz dazu würde eine Rendite von 14% bei jährlicher Verzinsung in

$$100 \cdot 1{,}14^5 = 192{,}54\,\$$$

resultieren. Die Rendite, welche am Ende der fünf Jahre 179,40 $ ergibt, liegt bei 12,4%, denn

$$100 \cdot 1{,}124^5 = 179{,}40\,\$\,.$$

Welche Durchschnittsrendite soll der Fondsmanager angeben? Er wird sicher versucht sein, eine Aussage der Art: „In den letzten fünf Jahren haben wir eine jährliche Durchschnittsrendite von 14% realisiert" zu treffen. Dies stimmt zwar, ist aber trotzdem irreführend. Zutreffender wäre die Aussage: „Die durchschnittliche Rendite für unsere Anleger betrug in den letzten fünf Jahren 12,4% pro Jahr." Fondsmanager sind teilweise gesetzlich verpflichtet, Renditen auf letztere Weise anzugeben.

Dies ist ein Beispiel für ein in der Mathematik wohlbekanntes Resultat. Das geometrische Mittel einer (nichtkonstanten) Zahlenfolge ist immer kleiner als das arithmetische Mittel. In unserem Beispiel betragen die Renditefaktoren 1,15, 1,20, 1,30, 0,80 und 1,25. Das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist 1,140, das geometrische Mittel dagegen nur 1,124.

14.4 Die Volatilität

Die Volatilität σ einer Aktie ist ein Maß für die Unsicherheit hinsichtlich der mit einer Aktie verbundenen Renditen. Üblicherweise haben Aktien eine Volatilität zwischen 15% und 60%.

Gemäß Gleichung (14.7) kann die Volatilität eines Aktienkurses definiert werden als die Standardabweichung der Aktienrendite über ein Jahr, wenn diese Rendite mit stetiger Verzinsung ausgedrückt wird.

Wenn Δt klein ist, dann folgt aus Gleichung (14.1), dass $\sigma^2\Delta t$ nahezu der Varianz der relativen Änderung des Aktienkurses im Zeitraum Δt entspricht. Das bedeutet, dass $\sigma\sqrt{\Delta t}$ nahezu der Standardabweichung der relativen Änderung des Aktienkurses im Zeitraum Δt entspricht. Angenommen, die Volatilität beträgt 0,3 oder 30% per annum, und der aktuelle Aktienkurs ist 50 \$. Die Standardabweichung der relativen Änderung des Aktienkurses innerhalb einer Woche beträgt ungefähr

$$30 \cdot \sqrt{\frac{1}{52}} = 4{,}16\% \, .$$

Eine Bewegung des Aktienkurses um eine Standardabweichung in einer Woche entspricht deshalb $50 \cdot 0{,}0416$, also 2,08 \$.

Unsere Unsicherheit hinsichtlich des zukünftigen Aktienkurses, gemessen durch seine Standardabweichung, nimmt näherungsweise mit der Quadratwurzel des Zeitraums, den wir in die Zukunft blicken, zu. Beispielsweise beträgt die Standardabweichung des Aktienkurses über vier Wochen das Doppelte der Standardabweichung über eine Woche.

Schätzung der Volatilität aus historischen Daten

Um die Volatilität eines Aktienkurses empirisch abzuschätzen, wird der Aktienkurs gewöhnlich über bestimmte feste Zeitintervalle (z. B. Tag, Woche oder Monat) beobachtet.

Wir definieren:

$n+1$: Anzahl der Beobachtungen

S_i: Aktienkurs am Ende des i-ten ($i = 0, 1, \ldots, n$) Intervalls

τ: Länge des Zeitintervalls in Jahren

und setzen

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$.

Der übliche Schätzer s der Standardabweichung von u_i ist mit

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}$$

oder

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2}$$

gegeben, wobei $\bar{u}$ der Mittelwert der u_i ist.[4]

Aus Gleichung (14.2) ergibt sich $\sigma\sqrt{\tau}$ für die Standardabweichung der u_i. Die Variable s ist folglich ein Schätzer für $\sigma\sqrt{\tau}$. Das heißt, dass σ selbst über $\hat{\sigma}$ geschätzt werden kann, wobei

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

gilt. Man kann zeigen, dass der Standardfehler dieser Schätzung näherungsweise $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$ beträgt.

4 Bei der Schätzung historischer Volatilitäten wird oft $\bar{u} = 0$ angenommen.

Die Wahl eines geeigneten Wertes für n ist nicht einfach. Die Verwendung von mehr Daten führt gewöhnlich zu einer höheren Genauigkeit der Schätzung, aber σ ändert sich im Zeitablauf, und Daten, die zu weit zurückliegen, können für die Prognose der zukünftigen Entwicklung irrelevant sein. Ein Kompromiss, der recht gut zu funktionieren scheint, besteht darin, die täglichen Schlusskurse der letzten 90 bis 180 Tage zu verwenden. Eine häufig benutzte Faustregel empfiehlt, n entsprechend der Anzahl an Tagen zu wählen, über die die geschätzte Volatilität verwendet werden soll. Wenn also die Volatilitätsschätzung eingesetzt werden soll, um eine Option mit zwei Jahren Laufzeit zu bewerten, werden die täglichen Daten der letzten beiden Jahre betrachtet. In Kapitel 22 werden ausgefeiltere Ansätze, wie z. B. GARCH-Modelle, für die Volatilitätsschätzung diskutiert.

Beispiel 14.4 In Tabelle 14.1 ist eine mögliche Entwicklung des Aktienkurses während der letzten 21 aufeinander folgenden Handelstage aufgeführt. In diesem Fall gilt

$$\sum u_i = 0{,}09531 \quad \text{und} \quad \sum u_i^2 = 0{,}00326\,,$$

und der Schätzer der Standardabweichung der täglichen Rendite beträgt

$$\sqrt{\frac{0{,}00326}{19} - \frac{0{,}09531^2}{380}} = 0{,}01216$$

oder 1,216%. Angenommen, im Jahr gibt es 252 Handelstage, dann gilt $\tau = 1/252$ und die Daten liefern eine Schätzung der Volatilität von $0{,}01216\sqrt{252} = 0{,}193$ oder 19,3% pro Jahr. Der Standardfehler dieser Schätzung beträgt

$$\frac{0{,}193}{\sqrt{2 \cdot 20}} = 0{,}031$$

oder 3,1% pro Jahr.

Tag	Schlusskurs (\$)	Kursverhältnis S_i/S_{i-1}	tägliche Rendite $u_i = \ln(S_i/S_{i-1})$
0	20		
1	20,10	1,00500	0,00499
2	19,00	0,99005	−0,01000
3	20,00	1,00503	0,00501
4	20,50	1,02500	0,02469
5	20,25	0,98780	−0,01227
6	20,90	1,03210	0,03159
7	20,90	1,00000	0,00000

Tag	Schlusskurs ($)	Kursverhältnis S_i/S_{i-1}	tägliche Rendite $u_i = \ln(S_i/S_{i-1})$
8	20,90	1,00000	0,00000
9	20,75	0,99282	−0,00720
10	20,75	1,00000	0,00000
11	21,00	1,01205	0,01198
12	21,10	1,00476	0,00475
13	20,90	0,99052	−0,00952
14	20,90	1,00000	0,00000
15	21,25	1,01675	0,01661
16	21,40	1,00706	0,00703
17	21,40	1,00000	0,00000
18	21,25	0,99299	−0,00703
19	21,75	1,02353	0,02326
20	22,00	1,01149	0,01143

Tabelle 14.1: Berechnung der Volatilität

Die vorangegangene Analyse beruht auf der Annahme, dass es sich um eine dividendenlose Aktie handelt. Sie kann aber auch auf Aktien mit Dividendenzahlung angepasst werden. Die Rendite u_i aus einem Zeitintervall, das einen Ausschüttungstag (Ex-Dividende-Tag) enthält, ist gegeben durch

$$u_i = \ln \frac{S_i + D}{S_{i-1}} ,$$

wobei D der Betrag der Dividende ist. Die Rendite aus den anderen Zeitintervallen ist weiterhin

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} .$$

Da jedoch steuerliche Faktoren bei der Bestimmung der Renditen unter Berücksichtigung einer Dividendenzahlung eine Rolle spielen, ist es wahrscheinlich am besten, auf Daten für Intervalle zu verzichten, die eine Dividendenzahlung enthalten.

Kalendertage und Handelstage

Eine wichtige Frage ist, ob die Zeit in Kalendertagen oder Handelstagen gemessen werden soll, wenn die Volatilitätsparameter geschätzt und verwendet werden. Wie Business Snapshot 14.2 zeigt, haben Untersuchungen ergeben, dass die Volatilität an Handelstagen wesentlich höher ist als an handelsfreien Tagen. Demzufolge neigen die Fachleute dazu, handelsfreie Tage zu ignorieren, wenn sie die Volatilität aus historischen Daten schätzen oder die Laufzeit einer Option berechnen. Die Volatilität

per annum wird aus der Volatilität pro Börsentag mithilfe der Formel

$$\text{Volatilität per annum} = \text{Volatilität pro Handelstag} \cdot \sqrt{\text{Anzahl der Handelstage per annum}}$$

berechnet. Genau dies haben wir in Beispiel 14.4 bereits verwendet, als wir die Volatilität aus den Daten von Tabelle 14.1 berechnet haben. Für Aktien wird gewöhnlich angenommen, dass ein Jahr 252 Handelstage umfasst.

Die Laufzeit einer Option wird ebenfalls meist in Handelstagen statt in Kalendertagen angegeben. Sie wird berechnet als

$$T = \frac{\text{Anzahl der Handelstage bis zur Fälligkeit der Option}}{252} .$$

T wird in Jahren angegeben.

Business Snapshot 14.2 – Worin liegen die Ursachen der Volatilität?

Die Vermutung liegt nahe, dass die Volatilität einer Aktie vom Eintreffen neuer Informationen am Markt verursacht wird. Diese Informationen bringen die Leute dazu, ihre Meinung über den Wert der Aktie zu überdenken. Der Aktienpreis ändert sich und dadurch entsteht Volatilität. Diese Ansicht über die Ursachen der Volatilität wird von Forschungsergebnissen nicht unterstützt. Mit über einen längeren Zeitraum gesammelten Aktienkursen am Ende jedes Handelstages lassen sich folgende Werte berechnen:

1. die Varianz der Aktienrenditen zwischen dem Handelsschluss eines Tages und dem Handelsschluss des nächsten Tages, wenn kein handelsfreier Tag dazwischenliegt,
2. die Varianz der Aktienrenditen zwischen dem Handelsschluss am Freitag und dem darauffolgenden Handelsschluss am Montag.

Die zweite Varianz stellt die Varianz von Renditen über einen 3-Tages-Zeitraum dar, die erste Varianz beschreibt einen 1-Tages-Zeitraum. Man könnte nun erwarten, dass die Varianz im zweiten Fall dreimal so hoch ist wie die Varianz im ersten Fall. Die Untersuchungen von Fama (1965), French (1980) sowie French und Roll (1986) zeigen, dass dies nicht zutrifft. Die drei Studien schätzten die zweite Varianz nur um 22%, 19% bzw. 10,7% höher als die erste Varianz.

Natürlich könnte man noch einwenden, dass sich die Resultate damit erklären lassen, dass mehr Informationen den Markt erreichen, wenn dieser für den Handel geöffnet ist. Doch die Untersuchung von Roll (1984) widerspricht dieser These. Roll beobachtete die Kurse von Orangensaft-Futures. Die mit Abstand wichtigsten Informationen für Orangensaft-Futures sind Wetterinformationen, welche an jedem Tag mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreffen können. Bei

einer ähnlichen wie der oben für Aktien beschriebenen Analyse stellte er fest, dass die zweite Varianz (Freitag bis Montag) nur das 1,54fache der ersten betrug.
Die einzig logische Schlussfolgerung aus dem Ganzen ist, dass Volatilität zu einem großen Teil durch den Handel selbst hervorgerufen wird. (Die Händler haben gewöhnlich kein Problem, diese Schlussfolgerung anzuerkennen!)

14.5 Die Idee der Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung

Die Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung ist eine Gleichung, die vom Preis jedes beliebigen Derivates erfüllt werden muss, das von einer dividendenlosen Aktie abhängt. Die Gleichung wird im nächsten Abschnitt hergeleitet. An dieser Stelle untersuchen wir die Grundlagen der verwendeten Argumente.

Die Argumente ähneln jenen No-Arbitrage-Argumenten, die wir in Kapitel 12 zur Bewertung von Aktienoptionen für den Fall verwendet haben, dass Aktienkurse binomialverteilt sind. Sie umfassen die Bildung eines risikolosen Portfolios, das je eine Position in einem Derivat und in einer Aktie beinhaltet. Ohne Arbitragemöglichkeiten muss die Rendite aus dem Portfolio dem risikolosen Zinssatz r entsprechen. Dies führt auf die Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung.

Der Grund dafür, dass ein risikoloses Portfolio gebildet werden kann, besteht darin, dass Aktienkurs und Derivatpreis von demselben zugrunde liegenden Unsicherheitsfaktor, nämlich den Schwankungen des Aktienkurses, betroffen sind. In jedem sehr kurzen Zeitabschnitt ist der Preis eines Derivates perfekt mit dem Kurs der zugrunde liegenden Aktie korreliert. Wenn ein geeignetes Portfolio aus der Aktie und dem Derivat zusammengestellt wurde, gleicht der Gewinn oder Verlust aus der Aktienposition immer den Gewinn oder Verlust aus der Derivatposition aus, sodass der Gesamtwert des Portfolios am Ende des kurzen Zeitabschnitts mit Sicherheit bekannt ist.

Wir nehmen beispielsweise an, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt die Beziehung zwischen einer kleinen Aktienkursänderung ΔS und der kleinen Änderung im Preis einer europäischen Kaufoption Δc gegeben ist durch

$$\Delta c = 0{,}4\Delta S\,.$$

Wie in Abbildung 14.2 dargestellt, bedeutet dies, dass die Steigung der Funktion, die die Beziehung zwischen c und S beschreibt, 0,4 beträgt. Das risikolose Portfolio besteht aus:

1. einer Long-Position in 0,4 Anteilen der Aktie,
2. einer Short-Position in einer Kaufoption.

Angenommen, der Aktienkurs steigt um 10 Cent. Dann steigt der Preis einer Option um 4 Cent und der Gewinn von $0{,}4 \cdot 10 = 4$ Cent in Aktien ist gleich dem Verlust von 4 Cent aus der Short-Position in den Kaufoptionen.

Hier zeigt sich ein gravierender Unterschied zwischen der Black-Scholes-Merton-Analyse und unserer in Kapitel 12 mithilfe des Binomialmodells durchgeführten Analyse. Im Rahmen der Black-Scholes-Merton-Welt ist die Position in der Aktie und dem Derivat nur für einen sehr kurzen Zeitabschnitt risikolos. (Theoretisch bleibt sie

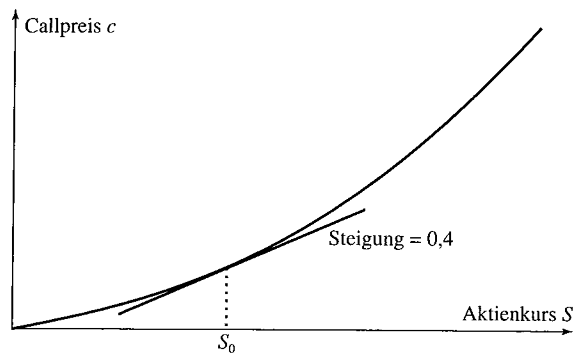

Abbildung 14.2: Beziehung zwischen c und S, der aktuelle Aktienkurs ist S_0

nur für einen Moment risikolos.) Damit die Position risikolos bleibt, muss sie regelmäßig angepasst werden.[5] Die Beziehung zwischen Δc und ΔS in unserem Beispiel kann sich etwa von $\Delta c = 0{,}4\Delta S$ heute auf $\Delta c = 0{,}5\Delta S$ in zwei Wochen ändern. Dies würde bedeuten, dass ein zusätzlicher Anteil von 0,1 Aktien für jeden verkauften Call erworben werden müsste, um die risikolose Position aufrechtzuerhalten. Dennoch ist es offensichtlich, dass die Rendite aus dem risikolosen Portfolio in einem beliebigen sehr kurzen Zeitabschnitt dem risikolosen Zinssatz entsprechen muss. Dies ist der Schlüssel zum Verständnis der Black-Scholes-Merton-Analyse und führt zu ihren Bewertungsformeln.

Annahmen

Um die Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung herzuleiten, legen wir die folgenden Annahmen zugrunde:

1. Der Aktienkurs folgt dem Prozess, der in Kapitel 13 entwickelt wurde, wobei μ und σ konstant sind.
2. Der Leerverkauf von Wertpapieren unter vollständiger Verwendung der resultierenden Einnahmen ist möglich.
3. Es gibt keine Transaktionskosten oder Steuern. Alle Wertpapiere sind ohne Einschränkung teilbar.
4. Während der Laufzeit des Derivates gibt es keine Dividendenzahlungen.
5. Es gibt keine risikolosen Arbitragemöglichkeiten.
6. Der Handel mit Wertpapieren findet fortlaufend statt.
7. Der risikolose Zinssatz r ist konstant und für alle Laufzeiten identisch.

Wie wir in späteren Kapiteln behandeln werden, können einige dieser Annahmen weniger streng formuliert werden. Beispielsweise können σ und r eine bekannte Funktion von t sein. Wir können auch einen stochastischen Zinssatz zulassen, wenn sichergestellt ist, dass die Aktienkurse zum Ende der Laufzeit der Option immer noch lognormalverteilt sind.

5 Die Anpassung von Portfolios, das so genannte Rebalancing, behandeln wir ausführlicher in Kapitel 18.

14.6 Herleitung der Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung

Die Notation in diesem Abschnitt unterscheidet sich vom Rest des Buches. Wir betrachten den Preis eines Derivats zu einem beliebigen, von null verschiedenen Zeitpunkt t. Bezeichnet T den Fälligkeitszeitpunkt, dann beträgt die Restlaufzeit $T-t$.

Der von uns angenommene Aktienkursprozess ist der in Abschnitt 13.3 entwickelte:

$$\mathrm{d}S = \mu S\,\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}z\,. \tag{14.8}$$

Wir nehmen an, dass f der Preis einer Kaufoption oder eines anderen Derivates von S ist. Die Variable f muss eine Funktion von S und t sein. Damit folgt aus Gleichung (13.14)

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\,\mathrm{d}z\,. \tag{14.9}$$

Die diskreten Versionen der Gleichungen (14.8) und (14.9) sind

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \tag{14.10}$$

und

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \partial f \partial t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z\,, \tag{14.11}$$

wobei Δf und ΔS die Änderungen von f und S in einem kurzen Zeitintervall Δt sind. Wir rufen uns aus der Diskussion von Itôs Lemma aus Abschnitt 13.6 in Erinnerung, dass die f und S zugrunde liegenden Wiener-Prozesse gleich sind. Mit anderen Worten, die Größen $\Delta z (= \epsilon\sqrt{\Delta t})$ aus den Gleichungen (14.10) und (14.11) sind identisch. Daraus folgt, dass man ein Portfolio aus der Aktie und dem Derivat so zusammenstellen kann, dass der Wiener-Prozess eliminiert wird.

Das geeignete Portfolio setzt sich wie folgt zusammen:

-1: Derivat

$+\partial f/\partial S$: Anteile der Aktie .

Der Inhaber dieses Portfolios hat eine Short-Position in einem Derivat sowie eine Long-Position mit $\partial f/\partial S$ Aktien. Wir definieren Π als den Wert des Portfolios. Per definitionem gilt

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S\,. \tag{14.12}$$

Die Änderung $\Delta\Pi$ im Wert des Portfolios im Zeitintervall Δt ist gegeben durch

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S\,. \tag{14.13}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (14.10) und (14.11) in Gleichung (14.13) ergibt sich

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t\,. \tag{14.14}$$

Weil diese Gleichung Δz nicht enthält, muss das Portfolio über den Zeitraum Δt risikolos sein. Die im vorhergehenden Abschnitt aufgelisteten Annahmen implizieren, dass das Portfolio die gleiche Rendite wie andere kurzfristige risikolose Anlagen erzielen muss. Wenn mehr als diese Rendite verdient werden kann, könnten Arbitrageure einen risikolosen Profit erzielen, indem sie Geld leihen, um das Portfolio zu kaufen. Wird weniger verdient, könnten sie ebenfalls einen risikolosen Profit erzielen, indem sie die Short-Position in dem Portfolio eingehen und von den Einnahmen risikolose Wertpapiere kaufen. Es folgt, dass

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \tag{14.15}$$

gilt, wobei r der risikolose Zinssatz ist. Durch Einsetzen der Gleichungen (14.12) und (14.14) in Gleichung (14.15) erhalten wir

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

und somit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf\,. \tag{14.16}$$

Gleichung (14.16) ist die Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung. Entsprechend den unterschiedlichen Derivaten, die mithilfe von S als zugrunde liegender Variable definiert werden können, hat sie zahlreiche Lösungen. Eine spezielle Lösung für ein bestimmtes Derivat hängt von den jeweiligen *Randbedingungen* (Boundary Conditions) ab. Diese bestimmen die Werte des Derivats an den Grenzen der für S und t möglichen Werte. Im Falle einer europäischen Kaufoption lautet die entscheidende Randbedingung

$$f = \max(S-K,0), \quad \text{falls } t = T \text{ gilt.}$$

Im Falle einer europäischen Verkaufsoption lautet sie

$$f = \max(K-S,0), \quad \text{falls } t = T \text{ gilt.}$$

Bezüglich des bei der Herleitung von Gleichung (14.16) benutzten Portfolios sei betont, dass dieses nicht permanent risikolos ist. Dies ist nur für einen infinitesimal kleinen Zeitabschnitt zutreffend. Wenn sich S und t ändern, so verändert sich auch $\partial f/\partial S$. Um das Portfolio risikolos zu halten, ist es notwendig, die relativen Anteile von Derivat und Aktie im Portfolio immer wieder anzupassen.

Beispiel 14.5 Ein Forward-Kontrakt auf eine dividendenlose Aktie ist ein von der Aktie abhängiges Derivat, das Gleichung (14.16) erfüllen sollte. Wir wissen aus Gleichung (5.5), dass der Wert f des Forward-Kontraktes zu einer bestimmten Zeit t gegeben ist mit

$$f = S - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,,$$

wobei K der Abrechnungspreis und S der Aktienkurs ist. Damit gilt

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0\,.$$

Setzen wir dies in die linke Seite der Gleichung (14.16) ein, so erhalten wir

$$-rK\mathrm{e}^{-r(T-t)} + rS\,.$$

Dies ist gleich rf, was zeigt, dass Gleichung (14.16) tatsächlich erfüllt ist.

Die Preise gehandelter Derivate

Eine beliebige Funktion $f(S,t)$, welche die Differentialgleichung (14.16) erfüllt, ist der theoretische Preis eines gehandelten Derivates. Wenn ein Derivat mit diesem Preis existieren würde, gäbe es keinerlei Arbitragemöglichkeiten. Umgekehrt kann eine Funktion $f(S,t)$, die die Differentialgleichung (14.16) nicht erfüllt, nicht der Preis für ein Derivat sein, ohne eine Arbitragemöglichkeit für Händler zu bieten.

Um diesen Sachverhalt zu verdeutlichen, betrachten wir zunächst die Funktion e^S, welche die Differentialgleichung (14.16) nicht erfüllt. Sie kommt deshalb für einen vom Aktienkurs abhängigen Preis eines Derivates nicht in Frage. Würde ein Instrument existieren, dessen Preis immer e^S wäre, so würde dies eine Arbitragegelegenheit bieten. Als zweites Beispiel betrachten wir die Funktion

$$\frac{\mathrm{e}^{(\sigma^2-2r)(T-t)}}{S}\,.$$

Sie erfüllt die Differentialgleichung und ist deshalb (theoretisch) der Preis eines handelbaren Wertpapiers. (Sie entspricht dem Preis eines Derivates, das $1/S_T$ zum Zeitpunkt T auszahlt.) Weitere Beispiele für handelbare Derivate werden in den Aufgaben 14.11, 14.12, 14.23 und 14.28 beleuchtet.

14.7 Risikoneutrale Bewertung

In Kapitel 12 haben wir die risikoneutrale Bewertung in Verbindung mit dem Binomialmodell vorgestellt. Sie ist ohne Zweifel das bedeutendste Instrument für die Analyse von Derivaten. Die risikoneutrale Bewertung ergibt sich aus einer wesentlichen Eigenschaft der Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung (14.16). Diese Eigenschaft besteht darin, dass in der Gleichung keine Variable vorkommt, die von den Risikopräferenzen des Anlegers abhängt. Die in die Gleichung eingehenden Variablen sind der aktuelle Aktienkurs, die Zeit, die Volatilität des Aktienkurses und der risikolose Zinssatz. Sie alle sind von Risikopräferenzen unabhängig.

Die Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung wäre von den Risikopräferenzen abhängig, wenn sie die erwartete Rendite μ aus der Aktie enthalten würde. Dies ist darin begründet, dass der Wert von μ von Risikopräferenzen abhängt. Je stärker die Risikoaversion der Anleger ist, um so größer wird μ für eine beliebige Aktie sein. Erfreulicherweise kann μ bei der Herleitung der Differentialgleichung eliminiert werden.

Da die Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung unabhängig von Risikopräferenzen ist, kann eine logische Schlussfolgerung gezogen werden. Wenn Risikopräferenzen nicht in die Gleichung eingehen, können sie auch nicht die Lösung beeinflussen. Es können daher beliebige Risikopräferenzen verwendet werden, um f zu bewerten. Insbesondere kann die einfache Annahme getroffen werden, dass alle Anleger risikoneutral sind.

In einer Welt, in der die Anleger risikoneutral sind, entspricht die erwartete Rendite auf alle Wertpapiere dem risikolosen Zinssatz r. Der Grund hierfür ist, dass risikoneutrale Anleger keine Prämie für die Übernahme von Risiken einfordern. Zudem kann der Barwert jedes beliebigen Cash Flow durch Diskontierung des zugehörigen Erwartungswerts mit dem risikolosen Zinssatz ermittelt werden. Die Annahme einer risikoneutralen Welt vereinfacht deshalb die Analyse von Derivaten erheblich.

Betrachten wir ein Derivat, das eine Auszahlung zu einem bestimmten Zeitpunkt bietet. Es kann über den risikoneutralen Bewertungsansatz folgendermaßen bepreist werden:

1. Wir nehmen an, dass die erwartete Rendite des zugrunde liegenden Vermögensgegenstandes dem risikolosen Zinssatz r entspricht, also $\mu = r$.
2. Wir berechnen die erwartete Auszahlung aus der Option am Ende ihrer Laufzeit.
3. Wir diskontieren die erwartete Auszahlung mit dem risikolosen Zinssatz.

Es ist wichtig, daran zu erinnern, dass die risikoneutrale Bewertung (oder die Annahme, dass alle Anleger risikoneutral sind) nur ein theoretisches Hilfsmittel ist, um zu Lösungen der Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung zu gelangen. Die erhaltenen Lösungen sind in allen Welten gültig, nicht nur in jenen, in denen die Anleger risikoneutral sind. Wenn wir uns von einer risikoneutralen Welt zu einer risikoaversen Welt bewegen, passieren zwei Dinge. Es ändern sich die erwarteten Zuwachsraten der Aktienkurse sowie der Diskontierungssatz, der für beliebige Auszahlungen des Derivates verwendet wird. Es zeigt sich, dass sich diese beiden Änderungen stets gegenseitig aufheben.

Anwendung für Forward-Kontrakte auf eine Aktie

Wir haben in Abschnitt 5.7 Forward-Kontrakte auf eine dividendenlose Aktie bewertet. In Beispiel 14.5 wurde nachgewiesen, dass die Bewertungsformel die Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung erfüllt. In diesem Abschnitt leiten wir die Bewertungsformel im Rahmen der risikoneutralen Bewertung her. Wir nehmen an, dass die Zinssätze konstant und gleich r sind. Dies bedeutet eine größere Einschränkung als die in Kapitel 5 getroffene Annahme.

Betrachten wir einen Long-Forward-Kontrakt, der zurzeit T mit dem Abrechnungspreis K fällig wird. Wie in Abbildung 1.2 gezeigt wurde, ist der Wert des Kontraktes bei Fälligkeit

$$S_T - K\,,$$

wobei S_T den Aktienkurs zum Zeitpunkt T bezeichnet. Ausgehend vom Argument der risikoneutralen Bewertung entspricht der Wert des Forward-Kontraktes zum Zeitpunkt null dem Erwartungswert in der risikoneutralen Welt zum Zeitpunkt T, diskontiert mit dem risikolosen Zinssatz. Wenn wir den Wert des Forward-Kontraktes zum Zeitpunkt null mit f bezeichnen, bedeutet dies

$$f = \mathrm{e}^{-rT}\hat{E}(S_T - K)$$

wobei $\hat{E}$ der Erwartungswert in einer risikoneutralen Welt ist. Da K konstant ist, geht diese Gleichung über in

$$f = \mathrm{e}^{-rT}\hat{E}(S_T) - K\mathrm{e}^{-rT} . \qquad (14.17)$$

Der erwartete Anstieg des Aktienkurses μ wird in der risikoneutralen Welt zu r. Folglich wird aus Gleichung (14.4)

$$\hat{E}(S_T) = S_0\,\mathrm{e}^{rT} . \qquad (14.18)$$

Das Einsetzen von Gleichung (14.18) in Gleichung (14.17) ergibt

$$f = S_0 - K\mathrm{e}^{-rT} . \qquad (14.19)$$

Dies stimmt mit Gleichung (5.5) überein.

14.8 Bewertungsformeln nach Black-Scholes-Merton

Die bekanntesten Lösungen der Differentialgleichung (14.16) sind die Black-Scholes-Merton-Formeln für die Preise europäischen Kauf- und Verkaufsoptionen. Sie lauten

$$c = S_0N(d_1) - K\mathrm{e}^{-rT}N(d_2) \qquad (14.20)$$

und

$$p = K\mathrm{e}^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \qquad (14.21)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} .$$

Die Funktion $N(x)$ ist die kumulative Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung, also die Wahrscheinlichkeit, dass eine Variable mit einer Standardnormalverteilung $\phi(0,1)$ kleiner als oder gleich x ist. Dies ist in Abbildung 14.3 verdeutlicht. Die verbleibenden Variablen sind bereits bekannt. Die Variablen c und p sind die Preise der europäischen Kauf- bzw. Verkaufsoptionen, S_0 ist der Aktienkurs zum Zeitpunkt null, K der Basispreis, r der risikolose Zinssatz bei stetiger Verzinsung, σ die Volatilität des Aktienkurses und T die Restlaufzeit der Option.

Eine Möglichkeit der Herleitung der Black-Scholes-Merton-Formeln besteht in der Lösung der Differentialgleichung (14.16) in Abhängigkeit von den in Abschnitt 14.6 erwähnten Randbedingungen.[6] (Für den Beweis, dass der Call-Preis in Glei-

6 Die Differentialgleichung gibt die Call- und Put-Preise zu einer Zeit t an. Beispielsweise ist der Preis einer Kaufoption, der die Differentialgleichung erfüllt, $c = SN(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2)$ mit

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

und $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$.

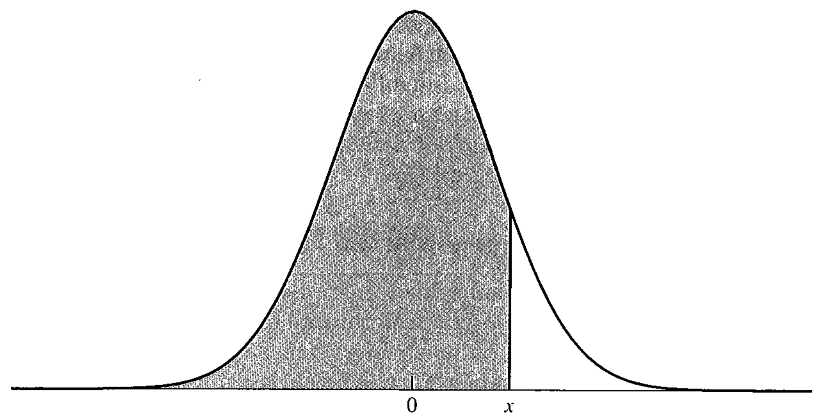

Abbildung 14.3: Der schattierte Bereich entspricht $N(x)$

chung (14.20) die Differentialgleichung erfüllt, siehe Aufgabe 14.17.) Ein anderer Ansatz ist die Verwendung der risikoneutralen Bewertung. Betrachten wir eine europäische Kaufoption. Der Erwartungswert einer Option in einer risikoneutralen Welt beträgt zum Fälligkeitszeitpunkt

$$\hat{E}[\max(S_T - K, 0)] ,$$

wobei wie bisher $\hat{E}$ der Erwartungswert in einer risikoneutralen Welt ist. Der Preis c der europäischen Kaufoption ist dieser Erwartungswert, diskontiert mit dem risikolosen Zinssatz, d. h.

$$c = \mathrm{e}^{-rT}\hat{E}[\max(S_T - K, 0)] . \qquad (14.22)$$

Im Anhang dieses Kapitels wird gezeigt, dass diese Gleichung zu dem Ergebnis (14.20) führt.

Um eine Interpretation der Terme in Gleichung (14.20) zu geben, stellen wir die Gleichung um:

$$c = \mathrm{e}^{-rT}[S_0N(d_1)\,\mathrm{e}^{rT} - KN(d_2)] . \qquad (14.23)$$

Der Ausdruck $N(d_2)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass die Option in einer risikoneutralen Welt ausgeübt wird. Somit ist $KN(d_2)$ das Produkt aus dem Basispreis und der Wahrscheinlichkeit, dass der Basispreis ausgezahlt wird. Der Ausdruck $S_0N(d_1)\,\mathrm{e}^{rT}$ ist der Erwartungswert einer Variablen, die in der risikoneutralen Welt gleich S_T ist, wenn $S_T > K$ gilt, und anderenfalls den Wert null hat.

Die Gleichung (14.20) gibt auch den Wert einer amerikanischen Kaufoption auf eine dividendenlose Aktie an, da es nie optimal ist, eine solche Option vorzeitig auszuüben (siehe Abschnitt 9.5). Leider konnte bislang für den Wert einer amerikanischen Verkaufsoption auf eine dividendenlose Aktie keine exakte analytische Formel gefunden werden. In Kapitel 20 werden numerische Verfahren und analytische Näherungslösungen zur Bewertung amerikanischer Verkaufsoptionen behandelt.

Wenn die Black-Scholes-Merton-Formel in der Praxis angewendet wird, wird der Zinssatz r dem risikolosen Zerobond-Zinssatz für eine Laufzeit von T gleichgesetzt. Wie wir in späteren Kapiteln zeigen werden, ist dies theoretisch korrekt, wenn r eine bekannte Funktion der Zeit ist. Unter Verwendung eines stochastischen Zinssatzes ist dieses Vorgehen ebenfalls theoretisch korrekt, wenn der Aktienkurs zum Zeitpunkt T lognormalverteilt ist und ein sinnvoller Volatilitätsparameter Verwendung findet. Wie bereits erwähnt wird die Zeit normalerweise als Anzahl der verbleibenden Handelstage während der Restlaufzeit der Option geteilt durch die Anzahl der Handelstage eines Jahres angegeben.

Eigenschaften der Black-Scholes-Merton-Formeln

Wir zeigen nun, dass die Black-Scholes-Merton-Formeln vernünftige Eigenschaften besitzen, wenn einige der Parameter Extremwerte annehmen.

Wenn der Aktienkurs S_0 sehr groß wird, ist es nahezu sicher, dass die Kaufoption ausgeübt wird. Sie wird dann einem Forward-Kontrakt mit einem Abrechnungspreis K sehr ähnlich. Nach Gleichung (5.5) erwarten wir einen Callpreis von

$$S_0 - K\mathrm{e}^{-rT} .$$

Dies entspricht tatsächlich dem über Gleichung (14.20) berechneten Preis der Kaufoption. Wenn S_0 sehr groß wird, werden sowohl d_1 als auch d_2 sehr groß, und $N(d_1)$ sowie $N(d_2)$ konvergieren beide gegen 1,0. Wenn der Aktienkurs sehr groß wird, geht der Preis p einer europäischen Verkaufsoption gegen null. Dies stimmt mit Gleichung (14.21) überein, da $N(-d_1)$ und $N(-d_2)$ in diesem Fall beide gegen null konvergieren.

Als Nächstes betrachten wir, was passiert, wenn die Volatilität σ gegen null geht. Weil die Aktie nahezu risikolos ist, wird ihr Preis entsprechend dem Zinssatz r auf $S_0\mathrm{e}^{rT}$ zum Zeitpunkt T steigen, und die Auszahlung der Kaufoption beträgt

$$\max(S_0\mathrm{e}^{rT} - K, 0) .$$

Diskontiert mit dem Zinssatz r, ergibt sich als heutiger Wert der Kaufoption

$$\mathrm{e}^{-rT}\max(S_0\mathrm{e}^{rT} - K, 0) = \max(S_0 - K\mathrm{e}^{-rT}, 0) .$$

Um zu zeigen, dass dies mit Gleichung (14.20) konsistent ist, nehmen wir zunächst an, dass $S_0 > K\mathrm{e}^{-rT}$ gilt. Dies bedeutet, dass $\ln(S_0/K)+rT > 0$ ist. Wenn σ gegen null geht, gehen d_1 und d_2 gegen $+\infty$, sodass $N(d_1)$ und $N(d_2)$ gegen 1,0 konvergieren und Gleichung (14.20)

$$c = S_0 - K\mathrm{e}^{-rT}$$

liefert. Falls $S_0 < K\mathrm{e}^{-rT}$ gilt, folgt $\ln(S_0/K)+rT < 0$. Wenn σ gegen null geht, gehen d_1 und d_2 gegen $-\infty$, sodass $N(d_1)$ und $N(d_2)$ wiederum gegen null gehen und Gleichung (14.20) einen Preis des Calls von null ergibt. Wenn σ gegen null geht, ist der Preis des Calls deshalb immer $\max(S_0 - K\mathrm{e}^{-rT}, 0)$. In gleicher Weise kann man zeigen, dass für den Preis des Puts immer $\max(K\mathrm{e}^{-rT} - S_0, 0)$ gilt, wenn σ gegen null geht.

14.9 Kumulierte Normalverteilungsfunktion

Bei der Umsetzung der Gleichungen (14.20) und (14.21) müssen Werte der kumulierten Normalverteilungsfunktion $N(x)$ berechnet werden. Am Schluss dieses Buches

befinden sich Tabellen für $N(x)$. Die Funktion NORMSDIST bzw. STANDNORMVERT in Excel berechnet $N(x)$ ebenfalls auf bequeme Weise.

Beispiel 14.6 Sechs Monate vor dem Verfall einer Option beträgt der Aktienkurs 42 \$, der Basispreis der Option liegt bei 40 \$, der risikolose Zinssatz bei 10% per annum und die Volatilität bei 20% per annum. Es gilt also $S_0 = 42$, $K = 40$, $r = 0{,}1$, $\sigma = 0{,}2$, $T = 0{,}5$,

$$d_1 = \frac{\ln(42/40) + (0{,}1 + 0{,}2^2/2)\cdot 0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}7693$$

$$d_2 = \frac{\ln(42/40) + (0{,}1 - 0{,}2^2/2)\cdot 0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}6278$$

und

$$K\mathrm{e}^{-rT} = 40\,\mathrm{e}^{-0{,}05} = 38{,}049 .$$

Handelt es sich um eine europäische Kaufoption, so ist ihr Wert c durch

$$c = 42N(0{,}7693) - 38{,}049N(0{,}6278)$$

gegeben. Im Fall einer europäischen Verkaufsoption beträgt der Wert p

$$p = 38{,}049N(-0{,}6278) - 42N(-0{,}7693) .$$

Unter Verwendung der NORMSDIST- bzw. STANDNORMVERT-Funktion in Excel erhalten wir

$$N(0{,}7693) = 0{,}7791, \quad N(-0{,}7693) = 0{,}2209,$$
$$N(0{,}6278) = 0{,}7349, \quad N(-0{,}6278) = 0{,}2651 ,$$

sodass

$$c = 4{,}76, \quad p = 0{,}81 .$$

Vernachlässigt man den Zeitwert des Geldes, muss der Aktienkurs um 2,76 \$ steigen, damit der Erwerber einer europäischen Kaufoption in die Gewinnzone gelangt. Analog muss er um 2,81 \$ fallen, damit der Erwerber einer europäischen Verkaufsoption in die Gewinnzone gelangt.

14.10 Optionsscheine und Mitarbeiteroptionen

Die Ausübung eines Plain-Vanilla-Calls auf die Aktien eines Unternehmen hat keine Auswirkungen auf die Anzahl der in Umlauf befindlichen Aktien des Unternehmens. Besitzt der Optionsverkäufer die Aktie des Unternehmens nicht, dann muss er sie ganz normal am Markt kaufen und dann zum Basispreis an den Optionsinhaber verkaufen. Wie in Kapitel 9 erläutert, unterscheiden sich Optionsscheine und Mitarbeiteroptionen von Standard-Calls dadurch, dass ihre Ausübung dazu führt, dass das Unternehmen zusätzliche Aktien herausgibt und diese zum Basispreis an den Optionsinhaber verkauft. Da der Basispreis unter dem Marktpreis liegt, verschlechtert dies die Position der Altaktionäre (Verwässerungseffekt).

Auf welche Weise sollte diese Verschlechterung der Position die Art der Bewertung von im Umlauf befindlichen Optionsscheinen und Mitarbeiteroptionen beeinflussen? Wenn man einen effizienten Kapitalmarkt unterstellt, dann ist die potenzielle Auswirkung aller ausstehenden Optionsscheine und Mitarbeiteroptionen bereits im Aktienkurs enthalten. Dies wird in Business Snapshot 14.3 erklärt.[7]

Business Snapshot 14.3 – Optionsscheine, Mitarbeiteroptionen und der Verwässerungseffekt

Wir betrachten ein Unternehmen mit 100 000 ausstehenden Aktien zum Wert von je 50 \$. Dieses Unternehmen überrascht den Markt mit der Ankündigung, dass es seinen Mitarbeitern 100 000 Aktienoptionen mit einem Basispreis von 50 \$ und einer Sperrfrist von drei Jahren gewährt. Sieht der Markt nur einen geringen Nutzen für die Aktionäre aus den Mitarbeiteroptionen in Form von reduzierten Gehältern und höhermotivierten Managern, dann wird der Aktienpreis direkt nach der Ankündigung fallen. Fällt er etwa auf 45 \$, beträgt der Verwässerungseffekt 5 \$ pro Aktie bzw. 500 000 \$ insgesamt.

Angenommen, das Unternehmen entwickelt sich während der Sperrfrist sehr positiv, sodass der Aktienpreis am Ende der drei Jahre bei 100 \$ liegt. Weiterhin nehmen wir an, dass alle Optionen zu diesem Zeitpunkt ausgeübt werden. Die Auszahlung an die Angestellten beträgt 50 \$ pro Option. Man könnte nun versucht sein zu behaupten, dass durch die Vermischung der 100 000 Aktien mit Wert 100 \$ mit den 100 000 Aktien mit Wert 50 \$ eine weitere Verwässerung eintritt, sodass (a) der Aktienkurs auf 75 \$ fällt und (b) die Auszahlung an die Optionsinhaber nur 25 \$ beträgt. Diese Argumentation ist jedoch fehlerhaft. Der Markt hat die Ausübung der Optionen antizipiert und dies spiegelt auch der Aktienpreis wider. Die Auszahlung aus jeder ausgeübten Option beträgt 50 \$.

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass effiziente Kapitalmärkte die Auswirkungen von Mitarbeiteroptionen oder Optionsscheinen bereits bei deren Ankündigung im Aktienkurs reflektieren und diese bei der Bewertung der Optionen nicht noch einmal berücksichtigt werden müssen.

Betrachten wir nun die Lage, in der sich ein Unternehmen befindet, das die Neuemission von Optionsscheinen (oder Mitarbeiteroptionen) in Betracht zieht. Wir nehmen an, dass das Unternehmen die Kosten der Emission berechnen möchte, und setzen voraus, dass keine Ausgleichszahlungen erfolgen. Das Unternehmen habe bereits N Aktien ausgegeben, deren Wert jeweils S_0 beträgt, und die geplante Anzahl an Optionsscheinen sei M, wobei jeder Optionsschein dem Inhaber das Recht zum Kauf von

7 Analysten gehen manchmal davon aus, dass die Summe der Werte der Optionsscheine und der Aktien (anstelle des reinen Aktienwertes) lognormalverteilt ist. Dies führt zu einem der Black-Scholes-Gleichung sehr ähnlichen Ergebnis für den Wert eines Optionsscheins in Abhängigkeit vom Wert des Optionsscheins. Siehe auch Technical Note 3 auf der Homepage des Autors (`www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes`), in der dieses Modell erklärt wird.

einer Aktie gibt. Der aktuelle Wert des Unternehmens beträgt NS_0. Dieser Wert ändert sich nicht bei Emission der Optionsscheine. Ohne die Emission der Optionsscheine sei der Preis der Aktien bei Fälligkeit der Optionsscheine S_T. Das heißt, dass (mit oder ohne Emission der Optionsscheine) der Gesamtwert von Aktien und Optionsscheinen zu einem Zeitpunkt T gleich S_T ist. Werden die Optionsscheine ausgeübt, gibt es einen Barzufluss durch den Basispreis, der den Gesamtwert auf $NS_T + MK$ ansteigen lässt. Dieser Wert verteilt sich auf $N + M$ Aktien. Damit beträgt der Aktienpreis unmittelbar nach der Ausübung der Option

$$\frac{NS_T + MK}{N + M} .$$

Der Optionsscheininhaber erhält daher bei der Ausübung des Optionsscheins eine Auszahlung von

$$\frac{NS_T + MK}{N + M} - K$$

bzw.

$$\frac{N}{N + M}(S_T - K) .$$

Der Wert des Optionsscheins ist demnach der Wert von

$$\frac{N}{N + M}$$

regulären Kaufoptionen auf die Aktie des Unternehmens. Die Gesamtkosten der Optionen sind dann das M-fache dieses Wertes. Da wir annehmen, dass das Unternehmen nicht von der Optionsschein-Emission profitiert, verringert sich der Gesamtwert des Unternehmens zum Zeitpunkt der Bekanntmachung der Entscheidung für die Emission der Optionsscheine um diese Kosten. Der Aktienkurs fällt folglich um den Wert einer regulären Kaufoption (Basispreis K, Laufzeit T) multipliziert mit dem Faktor

$$\frac{MN}{N + M} .$$

Beispiel 14.7 Ein Unternehmen mit 1 Million Aktien zum Wert von jeweils 40 \$ zieht die Emission von 200 000 Optionsscheinen in Betracht, von denen jeder das Recht auf Kauf einer Aktie zum Basispreis von 60 \$ in fünf Jahren beinhaltet. Das Unternehmen möchte die Kosten der Emission ermitteln. Der Zinssatz betrage 3% per annum, die Volatilität 30%. Das Unternehmen zahlt keine Dividenden. Nach Gleichung (14.20) beträgt der Wert einer fünfjährigen europäischen Kaufoption auf die Aktie 7,04 \$. Es gilt $N = 1\,000\,000$ und $M = 200\,000$, sodass jeder Optionsschein den Wert

$$\frac{1\,000\,000}{1\,000\,000 + 200\,000 \cdot 1} \cdot 7{,}04 = 5{,}87 ,$$

also 5,87 \$, hat. Die Gesamtkosten der Optionsscheinausgabe betragen 200 000 · 5,87 = 1,17 Millionen \$. In der Annahme, dass die Emission keine weiteren Vorteile mit sich bringt, sollte man erwarten, dass der Aktienpreis um 1,17 \$ auf 38,83 \$ zurückgeht.

14.11 Implizite Volatilitäten

Ein Parameter der Black-Scholes-Merton-Bewertungsformeln kann nicht direkt beobachtet werden: die Volatilität des Aktienkurses. In Abschnitt 14.4 erörterten wir, wie diese aus historischen Aktienkursen geschätzt werden kann. In der Realität arbeiten die Händler gewöhnlich mit so genannten *impliziten Volatilitäten*. Das sind die Volatilitäten, die in den am Markt beobachteten Optionspreisen enthalten sind.[8]

Zur Veranschaulichung der Berechnung impliziter Volatilitäten nehmen wir an, dass der Wert einer europäischen Kaufoption auf eine dividendenlose Aktie 1,875 beträgt, wenn $S_0 = 21$, $K = 20$, $r = 0{,}1$ sowie $T = 0{,}25$. Die implizite Volatilität ist jener Wert von σ, welcher beim Einsetzen in Gleichung (14.20) den Wert $c = 1{,}875$ ergibt. Leider kann man Gleichung (14.20) nicht so umformen, dass σ als Funktion von S_0, K, r, T und c ausgedrückt wird. Man kann jedoch ein iteratives Verfahren benutzen, um das erforderliche σ zu ermitteln. Wir können z. B. mit dem Versuch $\sigma = 0{,}20$ starten. Dies ergibt den Wert $c = 1{,}76$, welcher zu niedrig liegt. Da c eine in σ steigende Funktion ist, wird für σ ein höherer Wert benötigt. Als Nächstes können wir für σ den Wert 0,30 einsetzen. Für c ergibt dies einen Preis von 2,10, der zu hoch ist. Das bedeutet, dass σ zwischen 0,20 und 0,30 liegen muss. Nun testen wir den Wert 0,25 für σ. Dieser stellt sich ebenfalls als zu hoch heraus und zeigt, dass σ zwischen 0,20 und 0,25 liegt. Auf diese Weise kann der Bereich für σ mit jedem Iterationsschritt halbiert und der Wert für σ mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden.[9] In diesem Beispiel beträgt die implizite Volatilität 0,235 bzw. 23,5% per annum. Ein ähnliches Verfahren kann in Verbindung mit Binomialbäumen angewendet werden, um die impliziten Volatilitäten von amerikanischen Optionen zu ermitteln.

Implizite Volatilitäten werden verwendet, um die Marktmeinung über die Volatilität einer bestimmten Aktie zu beobachten. Während historische Volatilitäten (siehe Abschnitt 14.4) rückwirkend ermittelt werden, blicken implizite Volatilitäten in die Zukunft. Händler verwenden häufig die implizite Volatilität einer Option anstelle ihres Preises. Das ist sehr praktisch, da die implizite Volatilität im Normalfall geringer schwankt als der Optionspreis. Wie wir in Kapitel 19 erläutern werden, werden implizite Volatilitäten von aktiv gehandelten Optionen dazu benutzt, die geeigneten impliziten Volatilitäten anderer Optionen zu schätzen.

Der VIX-Index

Die CBOE veröffentlicht Indizes für implizite Volatilitäten. Der am weitesten verbreitete Index, der SPX VIX, ist ein Index der impliziten Volatilität von 30-Tages-Optionen auf den S&P 500, berechnet über eine große Anzahl von Calls und Puts.[10] Wie der Index berechnet wird, beschreiben wir in Abschnitt 25.15. Der Handel mit Futures auf den VIX begann 2004, Optionen auf den VIX werden seit 2006 gehandelt. Ein Handel mit Futures oder Optionen auf den S&P 500 ist ein Geschäft sowohl auf den zukünftigen Stand des S&P 500 als auch auf seine Volatilität. Dagegen stellt ein

8 Mit DerivaGem kann man implizite Volatilitäten für europäische und amerikanische Optionen ermitteln.

9 Diese Methode haben wir zu Illustrationszwecken verwendet. In der Praxis werden oft bessere Methoden, wie z. B. die Newton-Raphson-Methode, eingesetzt (siehe Fußnote 3 in Kapitel 4). DerivaGem kann zur Berechnung impliziter Volatilitäten eingesetzt werden.

10 In analoger Weise ist der VXN ein Index der Volatilität des NASDAQ 100-Index und der VXD ein Index der Volatilität des Dow Jones Industrial Average.

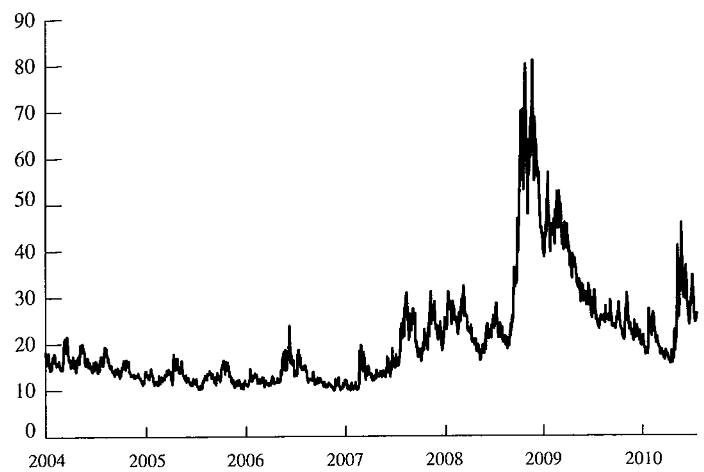

Abbildung 14.4: Der VIX-Index zwischen Januar 2004 und Juli 2010

Futures- oder Optionskontrakt auf den VIX nur eine Wette auf die Volatilität dar. Ein Kontrakt umfasst das 1000-fache des Indexwerts.

Beispiel 14.8 Angenommen, ein Händler kauft einen April-Futures-Kontrakt auf den VIX bei einem Futures-Kurs von 18,5 (der einer Volatilität der 30-Tage-Optionen auf den S&P 500 von 18,5% entspricht). Er gleicht die Position bei einem Futures-Kurs von 19,3 (der einer Volatilität der 30-Tage-Optionen auf den S&P 500 von 19,3% entspricht) aus. Der Händler erzielt einen Profit von 800 $.

Abbildung 14.4 zeigt den Verlauf des VIX-Index zwischen Januar 2004 und Juli 2010.Von 2004 bis Mitte 2007 bewegte sich der Index im Bereich zwischen 10 und 20. Er stieg im zweiten Halbjahr 2007 auf 30 an und erreichte den Rekordwert von 80 im Oktober/November 2008 nach dem Konkurs von Lehman Brothers. Anfang 2010 war der Index wieder auf Normalwerte zurückgegangen. Im Mai 2010 sprang er aber wieder aufgrund der Staatsschuldenkrise in Europa auf über 45.

14.12 Dividenden

Bisher wurden ausschließlich Optionen auf Aktien ohne Dividendenzahlung betrachtet. In diesem Abschnitt erweitern wir das Black-Scholes-Merton-Modell, um Dividenden berücksichtigen zu können. Wir nehmen an, dass der Betrag und die Zeitpunkte der Dividenden während der Laufzeit einer Option mit Sicherheit vorausgesagt werden können. Für kurzfristige Optionen ist dies eine nicht allzu unvernünftige Annahme. (Bei längerfristigen Optionen nimmt man gewöhnlich an, dass statt der Höhe der Dividendenzahlungen die Dividendenrendite bekannt ist. Dann können Optionen so bewertet werden, wie es im nächsten Kapitel beschrieben wird.) Dabei sollte man eine Auszahlung der Dividende zum Ex-Dividende-Zeitpunkt unterstellen. An diesem Tag fällt der Aktienkurs um die Höhe der Dividende.[11]

Europäische Optionen

Europäische Optionen können unter der Annahme analysiert werden, dass der Aktienpreis die Summe zweier Komponenten darstellt: einer risikolosen Komponente, welche den bekannten Dividenden während der Laufzeit der Option entspricht, und einer risikobehafteten Komponente. Die risikolose Komponente entspricht zu jedem beliebigen Zeitpunkt dem Barwert aller während der Optionslaufzeit auftretenden Dividenden, diskontiert mit dem risikolosen Zinssatz über den Zeitraum bis zum Ausschüttungstag. Zum Zeitpunkt der Fälligkeit der Option sind alle Dividenden gezahlt worden und die risikolose Komponente existiert nicht mehr. Daher ist die Black-Scholes-Merton-Formel korrekt, falls S_0 der risikobehafteten Komponente des Aktienkurses entspricht und σ die Volatilität des Prozesses ist, dem die Risikokomponente folgt.[12]

Im Anwendungssinne bedeutet dies, dass die Black-Scholes-Merton-Formeln eingesetzt werden können. Voraussetzung ist, dass der Aktienpreis um den Barwert aller Dividenden während der Optionslaufzeit reduziert wird, wobei die Diskontierung über die Zeiträume bis zu den Ex-Dividende-Tagen mit dem risikolosen Zinssatz erfolgt. Eine Dividende fällt, wie bereits erwähnt wurde, nur dann in die Laufzeit der Option, wenn ihr Ausschüttungstermin innerhalb der Laufzeit der Option liegt.

Beispiel 14.9 Wir betrachten eine europäische Kaufoption auf eine Aktie mit Ex-Dividende-Tagen in zwei und in fünf Monaten. An jedem Ex-Dividende-Tag wird eine Dividende von 0,50 \$ erwartet. Der aktuelle Aktienpreis beträgt 40 \$, der Basispreis beträgt ebenfalls 40 \$, die Volatilität des Aktienkurses liegt bei 30% per annum, der risikolose Zinssatz bei 9% per annum, die Laufzeit beträgt noch sechs Monate. Der Barwert der Dividenden beträgt

$$0{,}5\,e^{-0{,}1667\cdot 0{,}09} + 0{,}5\,e^{-0{,}4167\cdot 0{,}09} = 0{,}9742\,.$$

Der Optionspreis kann nun mit der Black-Scholes-Formel und den Werten $S_0 = 40 - 0{,}9742 = 39{,}0258$, $K = 40$, $r = 0{,}09$, $\sigma = 0{,}3$ und $T = 0{,}5$ berechnet werden.

Es ist

$$d_1 = \frac{\ln(39{,}0258/40) + (0{,}09 + 0{,}3^2/2)\cdot 0{,}5}{0{,}3\sqrt{0{,}5}} = 0{,}2020$$

$$d_2 = \frac{\ln(39{,}0258/40) + (0{,}09 - 0{,}3^2/2)\cdot 0{,}5}{0{,}3\sqrt{0{,}5}} = -0{,}0102\,.$$

Unter Verwendung der NORMSDIST- bzw. STANDNORMVERT-Funktion in Excel ergibt sich

$$N(d_1) = 0{,}5800, \quad N(d_2) = 0{,}4959\,,$$

womit als Preis der Kaufoption aus Gleichung (14.20)

$$39{,}0258\cdot 0{,}5800 - 40\,e^{-0{,}09\cdot 0{,}5}\cdot 0{,}4959 = 3{,}67\,,$$

also 3,67 \$, resultiert.

11 Aus steuerlichen Gründen kann es sein, dass der Aktienpreis um etwas weniger als den vollen Betrag der Dividenden zurückgeht. In Berücksichtigung dieser Tatsache sollte das Wort *Dividende* in diesem Abschnitt interpretiert werden als der durch die Ausschüttung der Dividende am so genannten Ex-Dividende-Tag verursachte Rückgang des Aktienpreises. Wenn also mit einer Dividende von 1 \$ pro Aktie gerechnet wird und der Kurs im Normalfall um 80% der am Ex-Dividende-Tag gezahlten Dividende zurückgeht, sollte im Rahmen der Analyse eine Dividende von 0,80 \$ angenommen werden.

12 In der Theorie entspricht dies nicht ganz der Volatilität des stochastischen Prozesses, dem der gesamte Aktienkurs folgt. Die Volatilität der Risikokomponente ist in etwa gleich der Volatilität des gesamten Aktienkurses multipliziert mit $S_0/(S_0 - D)$, wobei D den Barwert der Dividenden bezeichnet. Eine Anpassung ist jedoch nur dann nötig, wenn die Volatilitäten unter Verwendung historischer Daten geschätzt werden. Die implizite Volatilität wird nach Abzug des Barwertes der Dividenden vom Aktienpreis berechnet und stellt die Volatilität der Risikokomponente dar.

Amerikanische Optionen

Wir betrachten nun amerikanische Kaufoptionen. In Abschnitt 10.5 hatten wir gezeigt, dass diese amerikanische Optionen niemals vorzeitig ausgeübt werden sollten, wenn keine Dividenden gezahlt werden. Wenn Dividendenzahlungen anfallen, veranschaulicht eine Erweiterung dieses Arguments, dass eine Ausübung nur zu einem Zeitpunkt direkt vor einem Ausschüttungstermin optimal ist. Wir nehmen an, dass n Ausschüttungstage erwartet werden und $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Zeitpunkte unmittelbar vor den Ex-Dividende-Tagen sind, wobei $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$. Die zu den jeweiligen Terminen gehörenden Dividenden werden wir mit $D_1, D_2, \ldots, D_n$ bezeichnen.

Wir beginnen mit der Betrachtung einer möglichen vorzeitigen Ausübung unmittelbar vor dem letzten Ex-Dividende-Tag (d. h. zum Zeitpunkt t_n). Wird die Option zum Zeitpunkt t_n ausgeübt, erhält der Anleger

$$S(t_n) - K$$

Wird die Option nicht ausgeübt, fällt der Aktienpreis auf $S(t_n) - D_n$. Wie man aus Gleichung (10.8) erkennen kann, ist der Wert der Option dann größer als

$$S(t_n) - D_n - K\,e^{-r(T-t_n)}$$

Daraus folgt, dass es im Fall

$$S(t_n) - D_n - K\,e^{-r(T-t_n)} \geq S(t_n) - K\,,$$

d. h.

$$D_n \leq K\left(1 - e^{-r(T-t_n)}\right)\,, \tag{14.24}$$

nicht optimal sein kann, die Option zum Zeitpunkt t_n auszuüben. Andererseits kann man zeigen, dass es, falls

$$D_n > K\left(1 - e^{-r(T-t_n)}\right) \tag{14.25}$$

gilt, bei jeder vernünftigen Annahme über den vom Aktienpreis befolgten stochastischen Prozess und einem hinreichend großen Wert von $S(T_n)$ immer optimal ist, die Option zum Zeitpunkt t_n auszuüben. Die Ungleichung (14.25) wird tendenziell eher erfüllt, wenn der letzte Ex-Dividende-Tag nahe am Verfalltag der Option liegt (d. h. $T - t_n$ ist klein) und die Dividende hoch ist.

Betrachten wir nun den Zeitpunkt t_{n-1}, den vorletzten Ex-Dividende-Tag. Wird die Option zum Zeitpunkt t_{n-1} ausgeübt, so erhält der Anleger

$$S(t_{n-1}) - K$$

Wird die Option zum Zeitpunkt t_{n-1} nicht ausgeübt, fällt der Aktienpreis auf $S(t_{n-1}) - D_{n-1}$. Der früheste Zeitpunkt, an dem die Option wieder ausgeübt werden kann, ist t_n. Folglich ist nach Gleichung (10.8)

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - K\mathrm{e}^{-r(t_n - t_{n-1})}$$

eine Wertuntergrenze für den Optionspreis, falls diese nicht zum Zeitpunkt t_{n-1} ausgeübt wird. Hieraus folgt, dass im Fall

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - K\mathrm{e}^{-r(t_n - t_{n-1})} \geq S(t_{n-1}) - K$$

bzw.

$$D_{n-1} \leq K\left(1 - \mathrm{e}^{-r(t_n - t_{n-1})}\right)$$

die Ausübung der Option zum Zeitpunkt t_{n-1} nicht optimal ist. Analog gilt für alle $i < n$, dass die Ausübung zum Zeitpunkt t_i nicht optimal ist, falls

$$D_i \leq K\left(1 - \mathrm{e}^{-r(t_{i+1} - t_i)}\right) \qquad (14.26)$$

Die Ungleichung (14.26) ist annähernd äquivalent mit

$$D_i \leq Kr(t_{i+1} - t_i).$$

Unter der Annahme, dass K ziemlich nahe beim aktuellen Aktienpreis liegt, müsste die Dividendenrendite unter dem risikolosen Zinssatz liegen, damit diese Ungleichung erfüllt ist. Dies ist oft der Fall.

Aus dieser Analyse können wir schlussfolgern, dass in den meisten Fällen der einzige Zeitpunkt, den man für eine vorzeitige Ausübung einer amerikanischen Kaufoption in Betracht ziehen muss, der letzte Ex-Dividende-Tag t_n ist. Darüber hinaus können wir sicher sein, dass eine vorzeitige Ausübung keinesfalls optimal ist, wenn Ungleichung (14.26) für $i = 1, 2, \dots, n-1$ und zusätzlich Ungleichung (14.24) gelten.

Black-Approximation

Black schlägt ein Näherungsverfahren zur Berücksichtigung der vorzeitigen Ausübung von Kaufoptionen vor.[13] Es umfasst die (in diesem Abschnitt bereits beschriebene) Berechnung der Preise von europäischen Optionen mit den Laufzeiten T und t_n und die anschließende Gleichsetzung des Preises der amerikanischen Option mit

13 Siehe F. Black, „Fact and Fantasy in the Use of Options", *Financial Analysts Journal*, 31 (Juli/August 1975), 36–41, 61–72.

dem größeren der beiden Werte. Diese Approximation scheint in den meisten Fällen gut zu funktionieren.[14]

Beispiel 14.10 Wir betrachten die Situation von Beispiel 14.9, allerdings mit einer amerikanischen statt einer europäischen Option. In diesem Fall ist $D_1 = D_2 = 0{,}5$, $S_0 = 40$, $K = 40$, $r = 0{,}09$, $t_1 = 2/12$ und $t_2 = 5/12$. Weil

$$K\left(1 - \mathrm{e}^{-r(t_2 - t_1)}\right) = 40\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}09 \cdot 0{,}25}\right) = 0{,}89$$

größer als 0,5 ist, folgt (siehe Ungleichung (14.26)), dass die Option keinesfalls unmittelbar vor dem ersten Ex-Dividende-Tag ausgeübt werden sollte. Weiterhin folgt, da

$$K\left(1 - \mathrm{e}^{-r(T - t_2)}\right) = 40\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}09 \cdot 0{,}0833}\right) = 0{,}30$$

kleiner als 0,5 ist, dass die Option, wenn sie sich ausreichend tief im Geld befindet, unmittelbar vor dem zweiten Ex-Dividende-Tag ausgeübt werden sollte.

Wir bewerten nun die Option mit der Black-Approximation. Der Barwert der ersten Dividende beträgt

$$0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}1667 \cdot 0{,}09} = 0{,}4926\,,$$

sodass der Wert der Option, unter der Annahme, dass sie unmittelbar vor dem letzten Ex-Dividende-Tag verfällt, mit der Black-Scholes-Merton-Formel und den Werten $S_0 = 39{,}5074$, $K = 40$, $r = 0{,}09$, $\sigma = 0{,}30$ und $T = 0{,}4167$ berechnet werden kann. Er beträgt 3,52 \$. Der Wert der Option, wenn sie ausschließlich am Ende der sechs Monate ausgeübt werden kann, beträgt gemäß Beispiel 14.9 3,67 \$. Da bei der Black-Approximation der größere der beiden Werte herangezogen wird, ergibt sich als Wert der amerikanischen Kaufoption 3,67 \$.

Die Option kann, wie wir in Abschnitt 20.3 beschreiben werden, mithilfe eines Binomialbaums bewertet werden. Wie gesehen, ist der Wert der Option, den DerivaGem mit 500 Zeitschritten liefert, 3,72 \$. (Man beachte, dass DerivaGem die Eingabe der Dividenden in chronologischer Reihenfolge verlangt. Die Zeit bis zur Dividendenauszahlung in Spalte 1, die Höhe der Dividende in Spalte 2.) Für die Unterschiede zwischen dem Binominalmodell (BM) und der Black-Approximation (BA) gibt es zwei Gründe. Der erste Grund betrifft die Wahl des Zeitpunktes für die Entscheidung zur vorzeitigen Ausübung, der zweite betrifft die Art und Weise, wie die Volatilität verwendet wird. Die Wahl des Zeitpunktes für die Entscheidung zur vorzeitigen Ausübung sorgt dafür, dass der Wert im BM tendenziell größer wird als bei der BA. Bei der BA wird davon ausgegangen, dass der Inhaber heute entscheiden muss, ob er die Option in fünf oder in sechs Monaten ausüben will. Das BM erlaubt, dass die Entscheidung über

14 Eine exakte Formel, welche von Roll, Geske und Whaley zur Bewertung von Calls mit nur einem Ausschüttungstermin vorgeschlagen wurde, findet sich in Technical Note 4 auf der Homepage des Autors (`www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes`). Darin kommt die zweidimensionale Normalverteilung vor. Ein Verfahren zur Berechnung dieser Funktion wird in Technical Note 5 ebenfalls auf der Homepage des Autors angegeben.

die vorzeitige Ausübung zum Zeitpunkt in fünf Monaten vom Aktienkurs abhängen darf. Die Art und Weise, wie die Volatilität verwendet wird, lässt tendenziell den BA-Wert größer werden als den BM-Wert. Wenn wir bei der BA eine Ausübung nach fünf Monaten annehmen, bezieht sich die Volatilität auf den Aktienkurs minus dem Barwert der ersten Dividende. Nehmen wir eine Ausübung nach sechs Monaten an, bezieht sich die Volatilität auf den Aktienpreis minus dem Barwert der beiden Dividenden.

ZUSAMMENFASSUNG

Wir begannen dieses Kapitel mit der Untersuchung der Eigenschaften des in Kapitel 13 eingeführten Prozesses für Aktienkurse. Der Prozess impliziert für den Kurs einer Aktie zu einem zukünftigen Zeitpunkt bei gegebenem heutigen Aktienpreis eine Lognormalverteilung und für die stetige Rendite einer Aktie über einen bestimmten Zeitraum eine Normalverteilung. Unsere Unsicherheit über zukünftige Aktienkurse steigt, je weiter wir in die Zukunft blicken. Die Standardabweichung des Logarithmus des Aktienpreises entwickelt sich proportional zur Quadratwurzel des Zeitraums, den wir in die Zukunft blicken.

Um die Volatilität σ eines Aktienkurses empirisch zu schätzen, wird dieser in festgelegten Zeitintervallen (z. B. jeden Tag, jede Woche oder jeden Monat) beobachtet. Für jeden der Zeiträume wird der natürliche Logarithmus des Verhältnisses vom Aktienpreis am Ende des Zeitraums zum Aktienpreis zu Beginn des Zeitraumes berechnet. Die Volatilität wird schließlich geschätzt als Standardabweichung dieser Werte dividiert durch die Quadratwurzel der in Jahren ausgedrückten Länge des Zeitraums. Tage, an denen die Börse geschlossen ist, werden gewöhnlich bei der Zeitbemessung für die Berechnung der Volatilität ignoriert.

Die Differentialgleichung für den Preis eines von einer Aktie abhängigen Derivats kann durch die Bildung einer risikolosen Position in der Option und in der Aktie ermittelt werden. Da das Derivat und der Aktienkurs von der gleichen zugrunde liegenden Quelle der Unsicherheit abhängen, ist dies immer möglich. Die auf diesem Weg geschaffene Position bleibt nur für einen sehr kurzen Zeitraum risikolos. Die Rendite solch einer risikolosen Position muss jedoch stets dem risikolosen Zinssatz entsprechen, damit es keine Arbitragemöglichkeiten gibt.

Die erwartete Rendite einer Aktie findet keinen Eingang in die Black-Scholes-Merton-Differentialgleichung. Dies führt zu dem nützlichen, als risikoneutrale Bewertung bekannten Ergebnis. Es besagt, dass wir bei der Bewertung eines Derivats, welches von dem Preis einer Aktie abhängig ist, eine risikoneutrale Welt voraussetzen können. Das bedeutet wiederum, wir können annehmen, dass die erwartete Rendite einer Aktie gleich dem risikolosen Zinssatz ist. Somit sind die zukünftig erwarteten Auszahlungen mit dem risikolosen Zinssatz zu diskontieren. Die Black-Scholes-Merton-Gleichungen für europäische Calls und Puts können entweder durch Lösung ihrer Differentialgleichung oder durch die Anwendung der risikoneutralen Bewertung hergeleitet werden.

Die implizite Volatilität ist jene Volatilität, welche bei Verwendung der Black-Scholes-Merton-Formel zur Optionsbewertung den Marktpreis der Option ergibt. Händler beobachten implizite Volatilitäten. Sie verwenden häufig die implizite Volatilität einer Option anstelle ihres Preises. Sie haben Verfahren entwickelt, um aus den impliziten Volatilitäten von aktiv gehandelten Optionen die Volatilitäten anderer Optionen zu schätzen.

Die Black-Scholes-Merton-Gleichungen können erweitert werden, damit auch europäische Calls und Puts auf Aktien mit Dividendenzahlung bewertet werden können. Hierbei wird die Black-Scholes-Merton-Formel verwendet, wobei der Aktienpreis um den Barwert der während der Dauer der Option erwarteten Dividenden reduziert wird und als Volatilität die Volatilität des um den Barwert dieser Dividenden verringerten Aktienkurses eingesetzt wird.

Theoretisch gesehen könnten amerikanische Kaufoptionen unmittelbar vor einem beliebigen Ex-Dividende-Tag ausgeübt werden. In der Realität muss man sich gewöhnlich nur mit dem letzten Ex-Dividende-Tag beschäftigen. Fischer Black hat zur Bewertung amerikanischer Kaufoptionen eine Approximation vorgeschlagen. Bei dieser wird der Preis der amerikanischen Kaufoption gleich dem Maximum der Preise für zwei europäische Kaufoptionen gesetzt. Die erste europäische Kaufoption verfällt am gleichen Tag wie die amerikanische Kaufoption, die zweite verfällt unmittelbar vor dem letzten Ex-Dividende-Tag.

ZUSAMMENFASSUNG

Literaturempfehlungen

Zur Verteilung von Aktienkursänderungen

Blattberg, R. und N. Gonedes, „A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices“, *Journal of Business*, 47 (April 1974), 244–280.

Fama, E.F., „The Behavior of Stock Prices“, *Journal of Business*, 38 (Januar 1965), 34–105.

Kon, S.J., „Models of Stock Returns—A Comparison“, *Journal of Finance*, 39 (März 1984), 147–165.

Richardson, M. und T. Smith, „A Test for Multivariate Normality in Stock Returns“, *Journal of Business*, 66 (1993), 295–321.

Zur Black-Scholes-Merton-Analyse

Black, F., „Fact and Fantasy in the Use of Options and Corporate Liabilities“, *Financial Analysts Journal*, 31 (Juli/August 1975), 36–41, 61–72.

Black, F., „How We Came Up with the Option Pricing Formula“, *Journal of Portfolio Management*, 15, 2 (1989), 4–8.

Black, F. und M. Scholes, „The Pricing of Options and Corporate Liabilities“, *Journal of Political Economy*, 81 (Mai/Juni 1973), 637–659.

Merton, R.C., „Theory of Rational Option Pricing“, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Frühjahr 1973), 141–183.