

dimensionalen Normalverteilung bewertet werden.² Mit unserer üblichen Notation beträgt der Wert einer europäischen Kaufoption auf einen Call zum Zeitpunkt null

$$S_0 e^{-qT_2} M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - K_2 e^{-rT_2} M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1} K_1 N(a_2),$$

wobei

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S^*) + (r - q + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S_0/K_2) + (r - q + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2}.$$

Die Funktion M bezeichnet die kumulierte zweidimensionale Normalverteilung für die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Variable kleiner als a und die zweite Variable kleiner als b ist, wobei die Korrelation der beiden Variablen ρ beträgt.³ Die Variable S^* ist jener Assetpreis zum Zeitpunkt T_1 , bei dem der Optionspreis zum Zeitpunkt T_1 gleich K_1 ist. Liegt der tatsächliche Assetpreis zum Zeitpunkt T_1 über S^* , wird die erste Option ausgeübt. Liegt er unter S^* , verfällt die Option.

Mit ähnlicher Notation beträgt der Wert einer europäischen Verkaufsoption auf einen Call

$$K_2 e^{-rT_2} M(-a_2, b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) - S_0 e^{-qT_2} M(-a_1, b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1} K_1 N(-a_2).$$

Der Wert einer europäischen Kaufoption auf einen Put ist

$$K_2 e^{-rT_2} M(-a_2, -b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - S_0 e^{-qT_2} M(-a_1, -b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1} K_1 N(-a_2)$$

und der Wert einer europäischen Verkaufsoption auf einen Put ist

$$S_0 e^{-qT_2} M(a_1, -b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) - K_2 e^{-rT_2} M(a_2, -b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1} K_1 N(a_2).$$

25.7 Chooser Options

Bei einer *Chooser* Option (manchmal auch *As You Like It* Option genannt) kann der Inhaber nach einer festgelegten Zeitspanne entscheiden, ob die Option ein Call oder ein Put sein soll. Angenommen, diese Wahl wird zum Zeitpunkt T_1 getroffen. Zu diesem Zeitpunkt beträgt der Wert der Chooser Option

$$\max(c, p),$$

wobei c der Wert des zugrunde liegenden Calls ist und p der Wert des zugrunde liegenden Puts.

Handelt es sich bei beiden Optionen, die der Chooser Option zugrunde liegen, um europäische Optionen, die denselben Basispreis haben, kann man die Put-Call-Parität zur Bestimmung einer Bewertungsformel verwenden. Angenommen, S_1 ist

² Siehe R. Geske, „The Valuation of Compound Options“, *Journal of Financial Economics*, 7 (1979), 63–81; M. Rubinstein, „Double Trouble“, *Risk*, Dezember 1991/Januar 1992, S. 53–56.

³ Siehe Technical Note 5 auf der Homepage des Autors (www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes) zur Berechnung von M mit einem numerischen Verfahren. Auf der Homepage wird auch eine Funktion zur Berechnung von M zur Verfügung gestellt.

der Assetpreis zum Zeitpunkt T_1 , K der Basispreis, T_2 die Laufzeit der Optionen und r der risikolose Zinssatz. Die Put-Call-Parität impliziert

$$\begin{aligned} \max(c, p) &= \max(c, c + K e^{-r(T_2-T_1)} - S_1 e^{-q(T_2-T_1)}) \\ &= c + e^{-q(T_2-T_1)} \max(0, K e^{-(r-q)(T_2-T_1)} - S_1). \end{aligned}$$

Daraus wird ersichtlich, dass die Chooser Option ein Package mit folgenden Bestandteilen ist:

1. Eine Kaufoption mit Basispreis K und Laufzeit T_2
2. $e^{-q(T_2-T_1)}$ Verkaufsoptionen mit Basispreis $K e^{-(r-q)(T_2-T_1)}$ und Laufzeit T_1

Damit kann sie ohne weiteres bewertet werden.

Man kann komplexere Chooser Options definieren, bei denen Call und Put nicht denselben Basispreis und dieselbe Laufzeit haben. Dann handelt es sich nicht um Packages; vielmehr weisen die Optionen dann Eigenschaften auf, die an Compound Options erinnern.

25.8 Barrier Options

Barrier Options sind Optionen, bei denen die Auszahlung davon abhängt, ob der Preis des Underlyings in einem bestimmten Zeitraum eine bestimmte Höhe erreicht.

Am OTC-Markt werden regelmäßig verschiedene Arten von Barrier Options gehandelt. Sie sind für einige Marktteilnehmer attraktiv, da sie weniger kosten als die entsprechenden Standard-Optionen. Die Barrier Options können in *Knock-out Options* und *Knock-in Options* eingeteilt werden. Eine Knock-out Option verfällt, wenn der Preis des Underlying eine bestimmte Kursschwelle (Barrier) erreicht hat. Eine Knock-in Option beginnt erst dann zu existieren, wenn der Preis des Underlyings eine bestimmte Barrier erreicht hat.

Die Gleichungen (16.4) und (16.5) zeigen, dass der Wert eines Standard-Calls bzw. eines Standard-Puts zum Zeitpunkt null

$$\begin{aligned} c &= S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \\ p &= K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1) \end{aligned}$$

beträgt, wobei

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

Eine Form der Knock-out Option ist der *Down-and-out Call*. Dieser ist eine reguläre Kaufoption, welche verfällt, wenn der Assetpreis eine bestimmte Barrier H erreicht. Die Barrier liegt dabei unter dem anfänglichen Assetpreis. Die entsprechende Knock-in Option ist ein *Down-and-in Call*. Dieser ist ein Standard-Call, welcher erst dann zu existieren beginnt, wenn der Assetpreis eine bestimmte Barrier H erreicht.

Falls H kleiner oder gleich dem Basispreis K ist, ist der Wert eines Down-and-in Call zum Zeitpunkt null gegeben durch

$$c_{di} = S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(y) - K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T}),$$

wobei

$$\lambda = \frac{r - q + \sigma^2/2}{\sigma^2}$$

$$y = \frac{\ln[H^2/(S_0 K)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}.$$

Da der Wert eines Standard-Call gleich dem Wert eines Down-and-in Call plus dem Wert eines Down-and-out Call ist, ergibt sich der Wert des Down-and-out Call als

$$c_{do} = c - c_{di}.$$

Für $H \geq K$ gilt

$$c_{do} = S_0 N(x_1) e^{-qT} - K e^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(y_1) + K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{T})$$

und

$$c_{di} = c - c_{do}.$$

wobei

$$x_1 = \frac{\ln(S_0/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}, \quad y_1 = \frac{\ln(H/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}.$$

Ein *Up-and-out Call* ist eine Standard-Kaufoption, welche verfällt, wenn der Assetpreis eine Barrier H erreicht, die über dem gegenwärtigen Assetpreis liegt. Ein *Up-and-in Call* ist eine Standard-Kaufoption, welche erst dann zu existieren beginnt, wenn die Barrier erreicht wird. Falls H kleiner oder gleich dem Basispreis K ist, ist der Wert c_{uo} des Up-and-out Call null und der Wert c_{ui} des Up-and-in Call beträgt c . Ist H größer als K , gilt

$$c_{ui} = S_0 N(x_1) e^{-qT} - K e^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} [N(-y) - N(-y_1)] + K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} [N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})]$$

und

$$c_{uo} = c - c_{ui}.$$

Barrier Put Options werden analog zu Barrier Call Options definiert. Ein *Up-and-out Put* ist eine Verkaufsoption, welche verfällt, wenn eine Barrier H erreicht wird, die über dem gegenwärtigen Assetpreis liegt. Ein *Up-and-in Put* ist ein Put, welcher erst dann zu existieren beginnt, wenn die Barrier erreicht wird. Ist die Barrier H größer oder gleich dem Basispreis K , betragen ihre Werte

$$p_{ui} = -S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(-y) + K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(-y + \sigma\sqrt{T})$$

und

$$p_{uo} = p - p_{ui}.$$

Ist H kleiner oder gleich K , gilt

$$p_{uo} = -S_0 N(-x_1) e^{-qT} + K e^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(-y_1) - K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})$$

und

$$p_{ui} = p - p_{uo}.$$

Ein *Down-and-out Put* ist eine Verkaufsoption, welche verfällt, wenn eine Barrier unter dem gegenwärtigen Assetpreis erreicht wird. Ein *Down-and-in Put* ist eine Verkaufsoption, welche erst dann zu existieren beginnt, wenn die Barrier erreicht wird. Ist die Barrier größer als der Basispreis, gilt $p_{do} = 0$ und $p_{di} = p$. Ist die Barrier kleiner als der Basispreis, dann gilt

$$p_{di} = -S_0 N(-x_1) e^{-qT} + K e^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} [N(y) - N(y_1)] - K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} [N(y - \sigma\sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{T})]$$

und

$$p_{do} = p - p_{di}.$$

Diese Bewertungen gehen alle von der üblichen Annahme aus, dass der Assetpreis zu einem zukünftigen Zeitpunkt lognormalverteilt ist. Von großer Bedeutung für Barrier Options ist die Häufigkeit der Beobachtung des Assetpreises S , um festzustellen, ob die Barrier erreicht wurde. In den analytischen Formeln dieses Abschnitts haben wir angenommen, dass S kontinuierlich beobachtet wird, was auch manchmal der Fall ist.⁴ Oftmals legen die Bedingungen eines Kontraktes fest, dass S in regelmäßigen Abständen beobachtet wird, z. B. einmal am Tag um 12.00 Uhr. Broadie, Glasserman und Kou haben einen Weg zur Anpassung der von uns oben aufgeführten Formeln für den Fall diskreter Beobachtungen des Underlying-Preises angegeben.⁵ Die Barrier H wird für eine Up-and-in Option oder eine Up-and-out Option durch $H e^{0,5826\sigma\sqrt{T}/m}$ und für eine Down-and-in Option oder eine Down-and-out Option durch $H e^{-0,5826\sigma\sqrt{T}/m}$ ersetzt, wobei m angibt, wie oft der Assetpreis festgestellt wird (T/m ist damit die Länge eines Zeitintervalls zwischen zwei Beobachtungen).

Die Eigenschaften von Barrier Options unterscheiden sich häufig von denen der Standard-Options. Beispielsweise ist das Vega manchmal negativ. Wir betrachten einen Up-and-out Call, der Assetpreis liegt nahe an der Barrier. Wenn die Volatilität steigt, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Barrier erreicht wird. Im Ergebnis kann ein Anstieg der Volatilität unter diesen Umständen einen Rückgang des Preises der Barrier Option zur Folge haben.

Ein Nachteil der bisher betrachteten Barrier Options besteht darin, dass bereits eine kleine „Spitze“ („Spike“) im Assetpreis dazu führen kann, dass die Option aufhört zu existieren bzw. dass sie aktiv wird. Eine alternative Struktur ist die *Pari-ser Option*, bei der der Assetpreis über einen bestimmten Zeitraum über bzw. unter der Barrier liegen muss, ehe die Option in Kraft tritt bzw. verfällt. So könnte für

⁴ Eine Möglichkeit zu verfolgen, ob eine Barrier von unten (oben) erreicht wurde, besteht darin, eine Limit-Order zum Verkauf (Kauf) des Assets in Höhe der Barrier an die Börse zu geben und herauszufinden, ob die Order ausgeführt wird.

⁵ M. Broadie, P. Glasserman und S.G. Kou, „A Continuity Correction for Discrete Barrier Options“, *Mathematical Finance*, 7, Nr. 4 (Oktober 1997), 325–349.

einen Pariser Down-and-Out-Put, dessen Basispreis 90% des ursprünglichen Assetpreises und dessen Barrier 75% des ursprünglichen Assetpreises betragen, festgelegt werden, dass die Option verschwindet, falls der Assetpreis 50 Tage lang unter der Barrier liegt. In der Confirmation kann festgelegt werden, ob es sich um „50 aufeinanderfolgende Tage“ oder „50 beliebige Tage während der Laufzeit“ handelt. Pariser Optionen lassen sich schwieriger bewerten als reguläre Barrier Options.⁶ Man kann Monte-Carlo-Simulation und Binomialbäume einschließlich der in den Abschnitten 26.5 und 26.6 vorgestellten Erweiterungen verwenden.

25.9 Digitale Optionen

Digitale Optionen sind Optionen mit nichtkontinuierlichen Auszahlungen. Ein einfaches Beispiel einer digitalen Option ist der *Cash-or-nothing Call*. Dieser zahlt nichts aus, wenn der Assetpreis zum Zeitpunkt der Fälligkeit, T , unter dem Basispreis liegt, und er zahlt einen festen Betrag Q , wenn der Assetpreis bei Fälligkeit über dem Basispreis liegt. In einer risikoneutralen Welt beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Assetpreis bei Fälligkeit einer Option über dem Basispreis liegt, mit unserer üblichen Notation $N(d_2)$. Der Wert eines Cash-or-nothing Call ist daher $Qe^{-rT}N(d_2)$. Der *Cash-or-nothing Put* wird analog zum Cash-or-nothing Call definiert. Er zahlt den Betrag Q aus, wenn der Assetpreis unter dem Basispreis liegt, und nichts, wenn der Assetpreis über dem Basispreis liegt. Der Wert eines Cash-or-nothing Put ist $Qe^{-rT}N(-d_2)$.

Eine weitere Form einer digitalen Option ist der *Asset-or-nothing Call*. Dieser zahlt nichts aus, wenn der zugrunde liegende Assetpreis bei Fälligkeit unter dem Basispreis liegt, und er zahlt den Assetpreis aus, wenn dieser über dem Basispreis liegt. Mit unserer üblichen Notation beträgt der Wert eines Asset-or-nothing Call $S_0 e^{-qT}N(d_1)$. Ein *Asset-or-nothing Put* zahlt nichts aus, wenn der zugrunde liegende Assetpreis bei Fälligkeit über dem Basispreis liegt, und er zahlt den Assetpreis aus, wenn dieser unter dem Basispreis liegt. Der Wert eines Asset-or-nothing Put beträgt $S_0 e^{-qT}N(-d_1)$.

Eine europäische Standard-Kaufoption ist äquivalent mit einer Long-Position in einem Asset-or-nothing Call und einer Short-Position in einem Cash-or-nothing Call, wobei die Auszahlung aus dem Cash-or-nothing Call gleich dem Basispreis ist. Analog ist eine europäische Standard-Verkaufsoption äquivalent mit einer Long-Position in einem Cash-or-nothing Put und einer Short-Position in einem Asset-or-nothing Put, wobei die Auszahlung aus dem Cash-or-nothing Put gleich dem Basispreis ist.

25.10 Lookback Options

Die Auszahlungen aus Lookback Options hängen vom maximalen oder minimalen Preis ab, den das Asset während der Laufzeit der Option erreicht hat. Die Auszahlung aus einem Floating Lookback Call ist der Betrag, um den der Assetpreis bei Fälligkeit den kleinsten Assetpreis, der während der Laufzeit der Option erreicht wurde, übersteigt. Die Auszahlung aus einem Floating Lookback Put ist der Betrag, um den der größte Assetpreis, der während der Laufzeit der Option erreicht wurde, den Assetpreis bei Fälligkeit übersteigt.

⁶ Siehe z. B. M. Chesney, J. Cornwall, M. Jeanblanc-Picque, G. Kentwell und M. Yor, „Parisian pricing“, *Risk*, 10, 1 (1977), 77–79.

Für europäische Lookbacks sind Bewertungsformeln entwickelt worden.⁷ Der Wert eines Floating Lookback Call zum Zeitpunkt null beträgt

$$c_{fl} = S_0 e^{-qT} N(a_1) - S_0 e^{-qT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} N(-a_1) - S_{\min} e^{-rT} \cdot \left[N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)} e^{Y_1} N(-a_3) \right],$$

wobei

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (r-q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ a_2 &= a_1 - \sigma\sqrt{T} \\ a_3 &= \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (-r+q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ Y_1 &= -\frac{2(r-q - \sigma^2/2)\ln(S_0/S_{\min})}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

S_{\min} ist dabei der kleinste bis dato verzeichnete Assetpreis. (Falls der Lookback erst zum Betrachtungszeitpunkt emittiert wurde, gilt $S_{\min} = S_0$.) Aufgabe 25.23 befasst sich mit dem Fall $r = q$.

Der Wert eines Floating Lookback Put beträgt

$$p_{fl} = S_{\max} e^{-rT} \left[N(b_1) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)} e^{Y_2} N(-b_3) \right] + S_0 e^{-qT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} N(-b_2) - S_0 e^{-qT} N(b_2),$$

wobei

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\ln(S_{\max}/S_0) + (-r+q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ b_2 &= b_1 - \sigma\sqrt{T} \\ b_3 &= \frac{\ln(S_{\max}/S_0) + (r-q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ Y_2 &= \frac{2(r-q - \sigma^2/2)\ln(S_{\max}/S_0)}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

S_{\max} ist dabei der größte bis dato verzeichnete Assetpreis. (Falls der Lookback erst zum Betrachtungszeitpunkt emittiert wurde, gilt $S_{\max} = S_0$.)

Ein Floating Lookback Call versetzt den Inhaber in die Lage, das Underlying zum niedrigsten während der Optionslaufzeit erreichten Preis zu kaufen. Analog versetzt ein Floating Lookback Put den Inhaber in die Lage, das Underlying zum höchsten während der Optionslaufzeit beobachteten Preis zu verkaufen.

⁷ Siehe B. Goldman, H. Sosin und M.A. Gatto, „Path-Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High“, *Journal of Finance*, 34 (Dezember 1979), 1111–1127; M. Garman, „Recollection in Tranquility“, *Risk*, März 1989, S. 16–19.