



Binomialbäume

Grundlagen der Bewertung

Dr. Benjamin Wilding

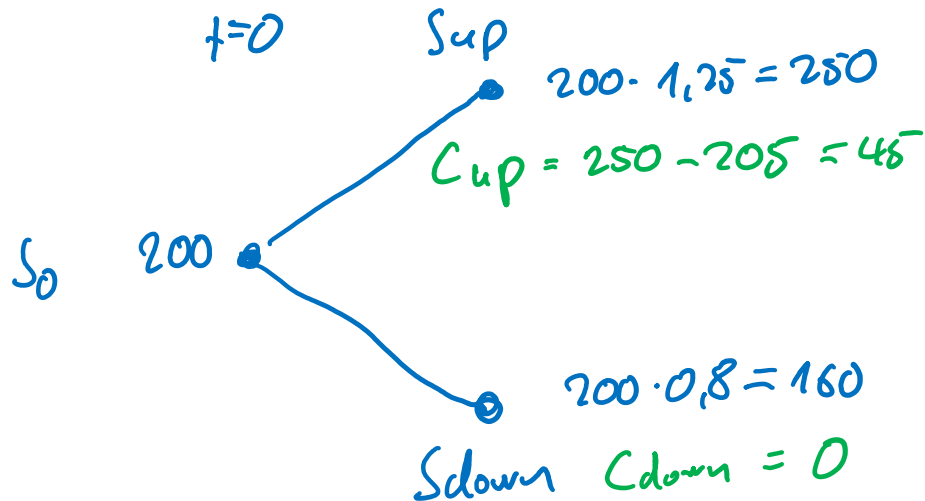
- Grundlegende Idee

- Die Entwicklung des Kurs des Basiswerts wird mit Hilfe eines ein- bis mehrstufigen Baums modelliert, wobei pro Periode der Kurs des Basiswerts entweder ansteigen (S_{up}) oder sinken (S_{down}) kann.
- Aufgrund der Arbitragefreiheit sowie der Existenz eines Replikationsportfolios können die Berechnungen unter Annahme einer risikoneutralen Welt vorgenommen werden.
- Der heutige Wert der Option entspricht den mit den jeweiligen Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichteten, diskontierten Werten, welche die Option am Ende der Laufzeit im entsprechenden Zustand aufweist.

Beispiel: Einstufiger Baum (1/2)

- Wert einer Call-Option?

- Aktueller Aktienkurs: $S_0 = 200$
- Up-Faktor: $up = 1.25$
- Down-Faktor: $down = 0.80 = \frac{1}{1.25} = \frac{1}{up}$
- Ausübungspreis: $X = 205$
- Risikoloser Zinssatz p.a.: $r_f = 2\%$
- Laufzeit in Jahren: $t = 1$



$$E(C_{call}_{t=1}) = 0,4889 \cdot 45 + 0,5111 \cdot 0 = 22$$

$$C_{call}_{t=0} = \frac{22}{1,02^1} = 21,57$$

Beispiel: Einstufiger Baum (2/2)

$$S_0 \cdot (1+r_f)^t = p^+ \cdot S_{up} + p^- \cdot S_{down} \quad | \quad p^- = 1 - p^+$$

$$S_0 \cdot (1+r_f)^t = p^+ \cdot S_{up} + (1-p^+) \cdot S_{down}$$

$$S_0 \cdot (1+r_f)^t = p^+ \cdot S_{up} + S_{down} - p^+ \cdot S_{down}$$

$$S_0 \cdot (1+r_f)^t - S_{down} = p^+ \cdot S_{up} - p^+ \cdot S_{down}$$

$$S_0 \cdot (1+r_f)^t - S_{down} = p^+ \cdot (S_{up} - S_{down})$$

$$p^+ = \frac{S_0 \cdot (1+r_f)^t - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} = \frac{S_0 \cdot (1+r_f)^t - S_0 \cdot down}{S_0 \cdot up - S_0 \cdot down}$$

$$\begin{aligned} | \quad S_{up} &= S_0 \cdot up \\ S_{down} &= S_0 \cdot down \end{aligned}$$

$$p^+ = \frac{(1+r_f)^t \cdot down}{up - down} = \frac{(1+0,02)^1 - 0,80}{1,25 - 0,80} = 48,89\%$$

$$p^- = 1 - 0,4889 = 51,11\%$$

Beispiel: Dreistufiger Baum (1/3)

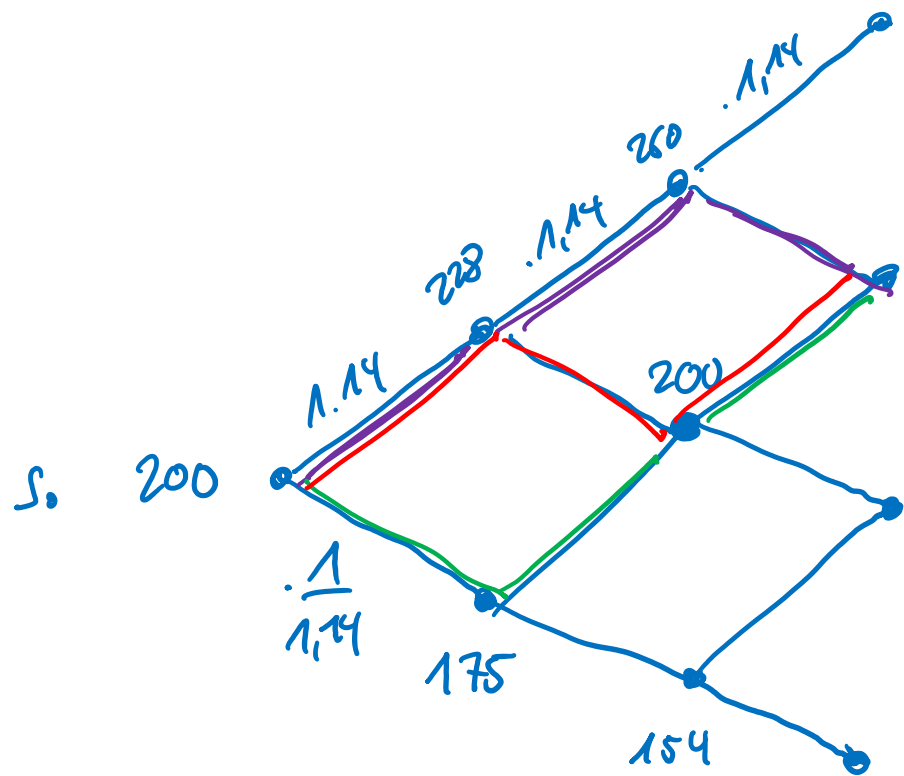
- Wert einer Call-Option?

- Aktueller Aktienkurs: $S_0 = 200$
- Up-Faktor: $up = 1.14$
- Down-Faktor: $down = 0.88$ $\left| = \frac{1}{1.14} \right.$
- Ausübungspreis: $X = 205$
- Risikoloser Zinssatz p.a.: $r_f = 2\%$
- Laufzeit: $t = 1$ \rightarrow 1 Periode $\hat{=}$ 4 Monate

$$p^+ = \frac{(1 + 0,02)^{1/3} - \frac{1}{1,14}}{1,14 - \frac{1}{1,14}} = 49,25\%$$

$$p^- = 1 - 0,4925 = 50,75\%$$

Beispiel: Dreistufiger Baum (2/3)



296,31

$$\text{Call} = 296,31 - 205 = 91,31$$

$$\text{WSK} = 0,4925 \cdot 0,4925 \cdot 0,4925 = 0,4925^3 = 11,95\%$$

228,00

$$\text{Call} = 228 - 205 = 23,00$$

$$\text{WSK} = 0,4925^2 \cdot 0,5075^1 \cdot 3 = 36,93\%$$

175,44

$$\text{Call} = 0$$

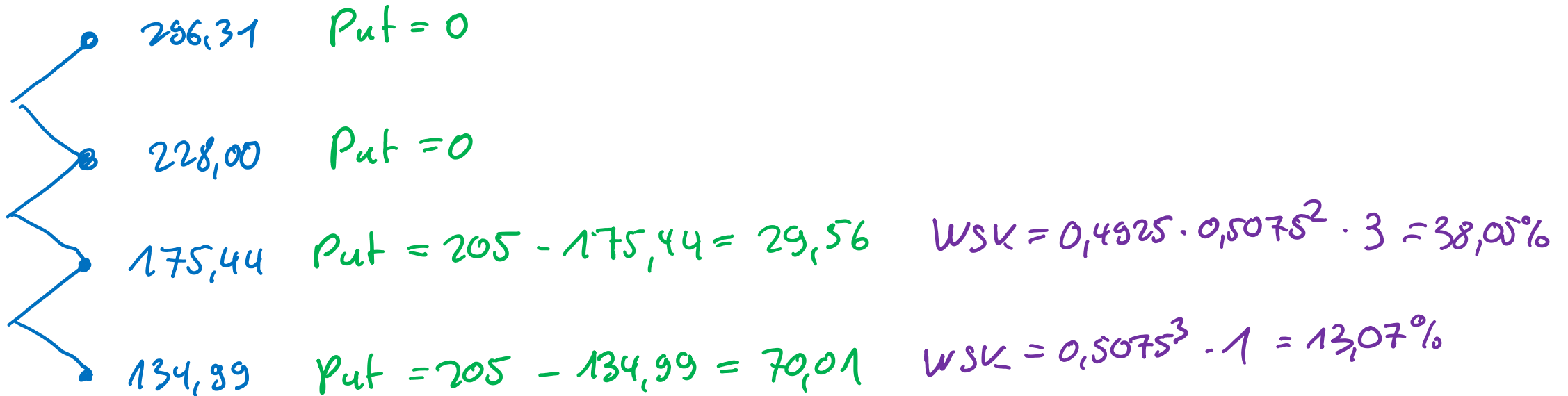
134,99

$$\text{Call} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Call}_{t=0} &= \frac{0,1195 \cdot 91,31 + 0,3693 \cdot 23,00}{1,021} \\ &= 19,02 \end{aligned}$$

Beispiel: Dreistufiger Baum (3/3)

- Wert einer Put-Option?



$$\text{Put} = \frac{0,3805 \cdot 29,56 + 0,1307 \cdot 70,01}{1,02^1} = 20,00$$