Black-Scholes

Grundlagen der Bewertung

Dr. Benjamin Wilding

Black-Scholes-Preisformel

- Grundlegende Idee
  - Wenn die Anzahl an Stufen gegen unendlich strebt, d.h. die Zeitdauer der einzelnen Perioden sehr klein wird, dann wird der mit Hilfe des Binomialbaums ermittelte Optionswert demjenigen Wert entsprechen, welcher mit der Black-Scholes-Formel berechnet wird.
  - Die Black-Scholes-Formel in ihrer Grundform erfasst die fünf Sensitivitätsparameter des Optionspreises sowie allfällige Dividendenzahlungen.
    - S: Kurs des Basiswerts
    - X: Ausübungspreis
    - t: Laufzeit
    - σ: Volatilität
    - r: risikoloser Zinssatz p.a.
    - D: Dividende
    - q: Dividendenrendite

Übersicht über die Formeln

- 1. Schritt: Werte für d_1 und d_2 ermitteln

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

$d_1 > d_2$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t}$$

$d_1 \to N(d_1)$

$d_2 \to N(d_2)$

- 2. Schritt: Wahrscheinlichkeiten berechnen → Normalverteilung
- 3. Schritt: Optionswert ermitteln

Delta

Pseudoausübungswahrscheinlichkeit

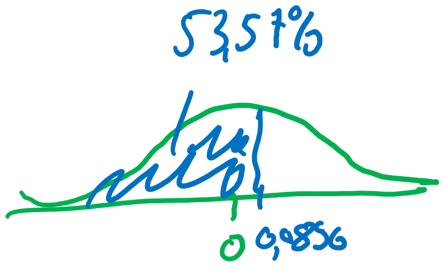
$$Call = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r\cdot t} \cdot N(d_2)$$

$$Put = X \cdot e^{-r\cdot t} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1)$$

Beispiel

- Wert einer Call-Option?
  - Aktueller Aktienkurs: $S_0 = 200$
  - Volatilität: $\sigma = 22.3\%$
  - Ausübungspreis: $X = 205$
  - Risikoloser Zinssatz p.a.: $r_f = 2\%$ → stetiger Zinssatz $= 1{,}98\%$ $(\ln(1+0{,}02))$
  - Laufzeit: $t = 1$

$$up = e^{\sigma \cdot \sqrt{t/n}}$$ / n = Anzahl Stufen



$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{200}{205}\right) + \left[0{,}0198 + \frac{0{,}223^2}{2}\right] \cdot 1}{0{,}223 \cdot \sqrt{1}} = 0{,}0896$$

$N(d_1) = 0{,}5357$

$N(d_2) = 0{,}4469$

$$d_2 = 0{,}0896 - 0{,}223 \cdot \sqrt{1} = -0{,}1334$$

$$Call = 200 \cdot 0{,}5357 - 205 \cdot e^{-0{,}0198 \cdot 1} \cdot 0{,}4469 = \underline{17{,}31}$$

Beispiel

- Wert einer Put-Option?

$$N(-d_1) = 1 - N(d_1) = 0{,}4643$$

$$N(-d_2) = 1 - N(d_2) = 0{,}5531$$

$$Put = 205 \cdot e^{-0{,}0198 \cdot 1} \cdot 0{,}5531 - 200 \cdot 0{,}4643 = 18{,}29$$

Konstante Dividendenrendite

- 1. Schritt: Werte für d_1 und d_2 ermitteln

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + \left[r \boxed{-q} + \frac{\sigma^2}{2} \right] \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t}$$

- 2. Schritt: Wahrscheinlichkeiten berechnen → Normalverteilung
- 3. Schritt: Optionswert ermitteln

$$Call = \boxed{S \cdot e^{-qT}} \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r \cdot t} \cdot N(d_2)$$

$$Put = X \cdot e^{-r \cdot t} \cdot N(-d_2) - \boxed{S \cdot e^{-qT}} N(-d_1)$$

Einzelne Dividendenzahlungen

- 1. Schritt: Werte für d_1 und d_2 ermitteln

$$d_1 = \frac{\ln \frac{\boxed{S - PV(D)}}{X} + \left[r + \frac{\sigma^2}{2} \right] \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t}$$

- 2. Schritt: Wahrscheinlichkeiten berechnen → Normalverteilung
- 3. Schritt: Optionswert ermitteln

$$Call = \boxed{[S - PV(D)]} \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r \cdot t} \cdot N(d_2)$$

$$Put = X \cdot e^{-r \cdot t} \cdot N(-d_2) - \boxed{[S - PV(D)]} \cdot N(-d_1)$$

Preisformel

- Grundlegende Idee
  - Aus Gründen der Arbitragefreiheit kann der Wert einer Put-Option aus dem Wert einer Call-Option ermittelt werden.
  - Voraussetzung ist, dass jegliche Parameter der Call- und Put-Option identisch sind, d.h. gleicher Basiswert, gleiche Laufzeit und gleicher Ausübungspreis.
  - Formel: $PV(X) + Call = S + Put$

$$Put = PV(X) + Call - S$$

$$= 205 \cdot e^{-0{,}0198 \cdot 1} + 17{,}31 - 200 = 18{,}29$$