Bewertung

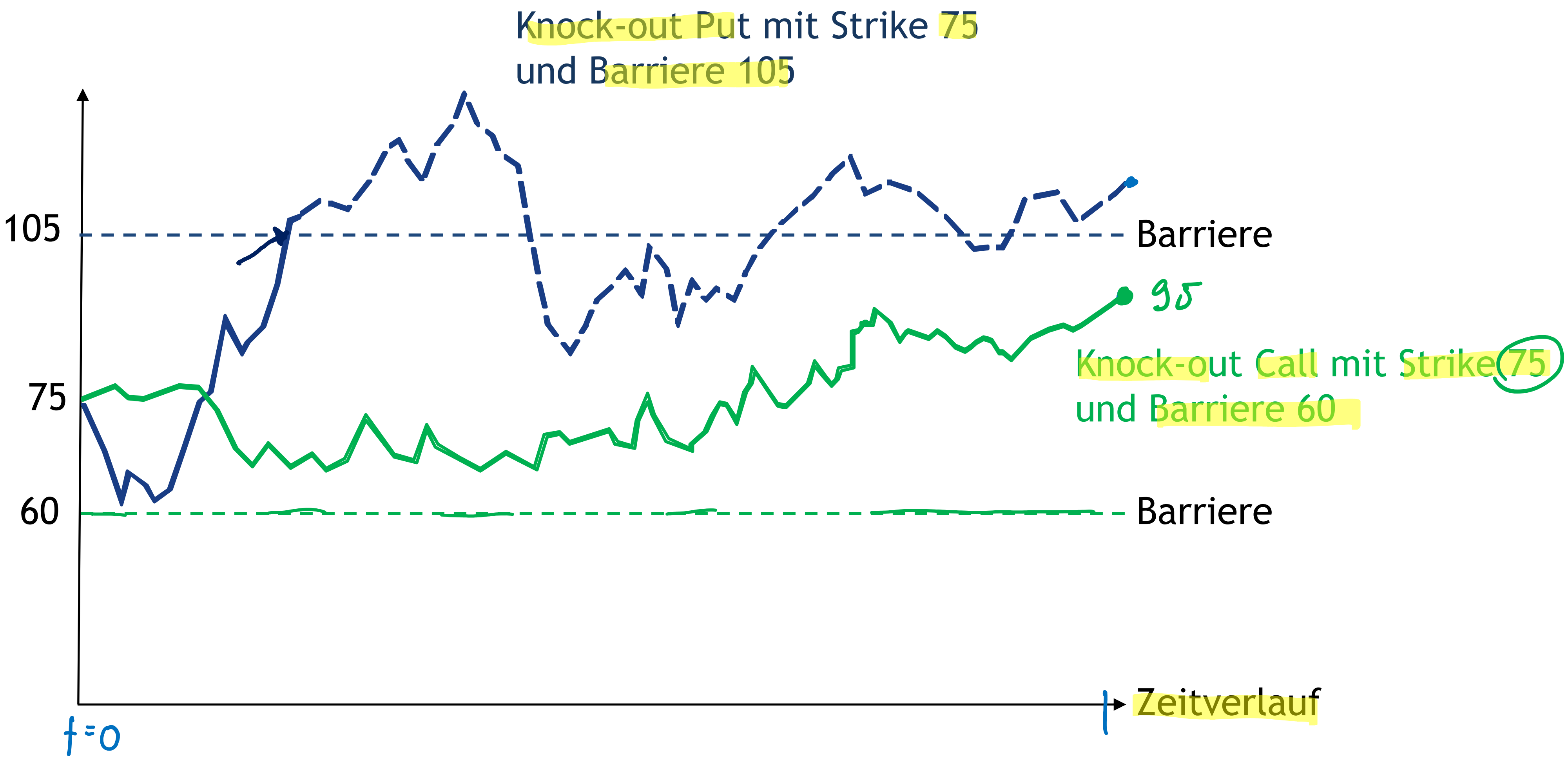
Barriere-Optionen

Dr. Benjamin Wilding

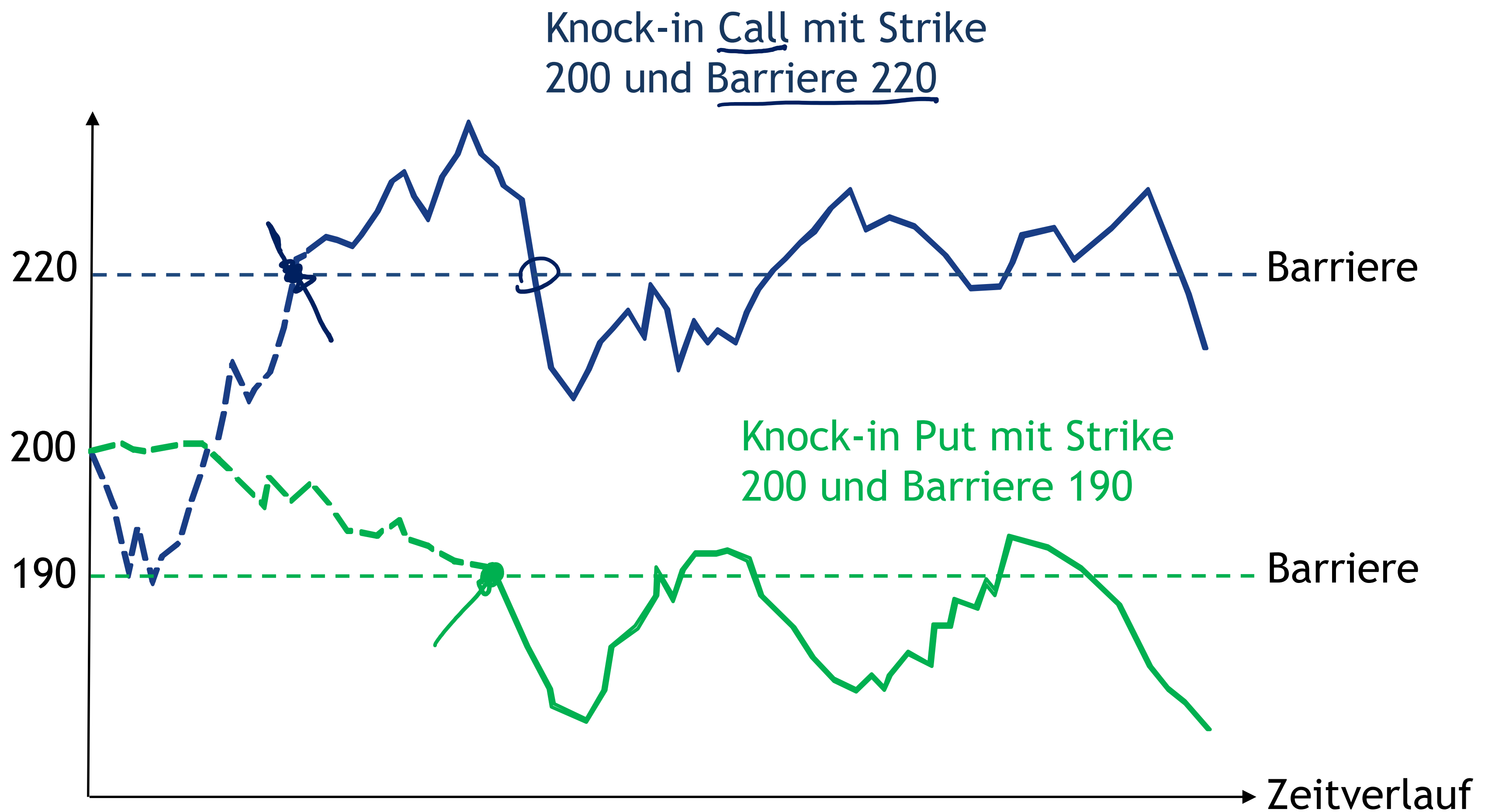
Funktionsweise Barriere-Option

- Der Wert einer Barriere-Option am Ende der Laufzeit ist abhängig von den Bewegungen des Basiswertes während der Laufzeit.
- Die Knock-out Option verfällt wertlos, falls Kurs des Basiswertes eine im Voraus definierte Barriere berührt.
- Die Knock-in Option wird nur gültig, falls Kurs des Basiswertes eine im Voraus definierte Barriere berührt.
- Barriere-Optionen sind günstiger als „normale" Optionen, da die Wahrscheinlichkeit einer Ausübung geringer ist.
- Volatilität spielt bei Barriere-Option eine weniger zentrale Rolle bei der Preisbestimmung der Option als bei „normalen" Optionen.

Knock-out Optionen



Knock-in Optionen



Gliederung

- Neben Knock-out und Knock-in können Barriere-Optionen auch nach Lage der Barriere im Vergleich zum Basiswert gegliedert werden:
  - Up: Barriere > Basiswert
  - Down: Barriere < Basiswert

CALL	Knock-out	Knock-in
Up	Up-and-out Call	Up-and-in Call
Down	Down-and-out Call	Down-and-in Call

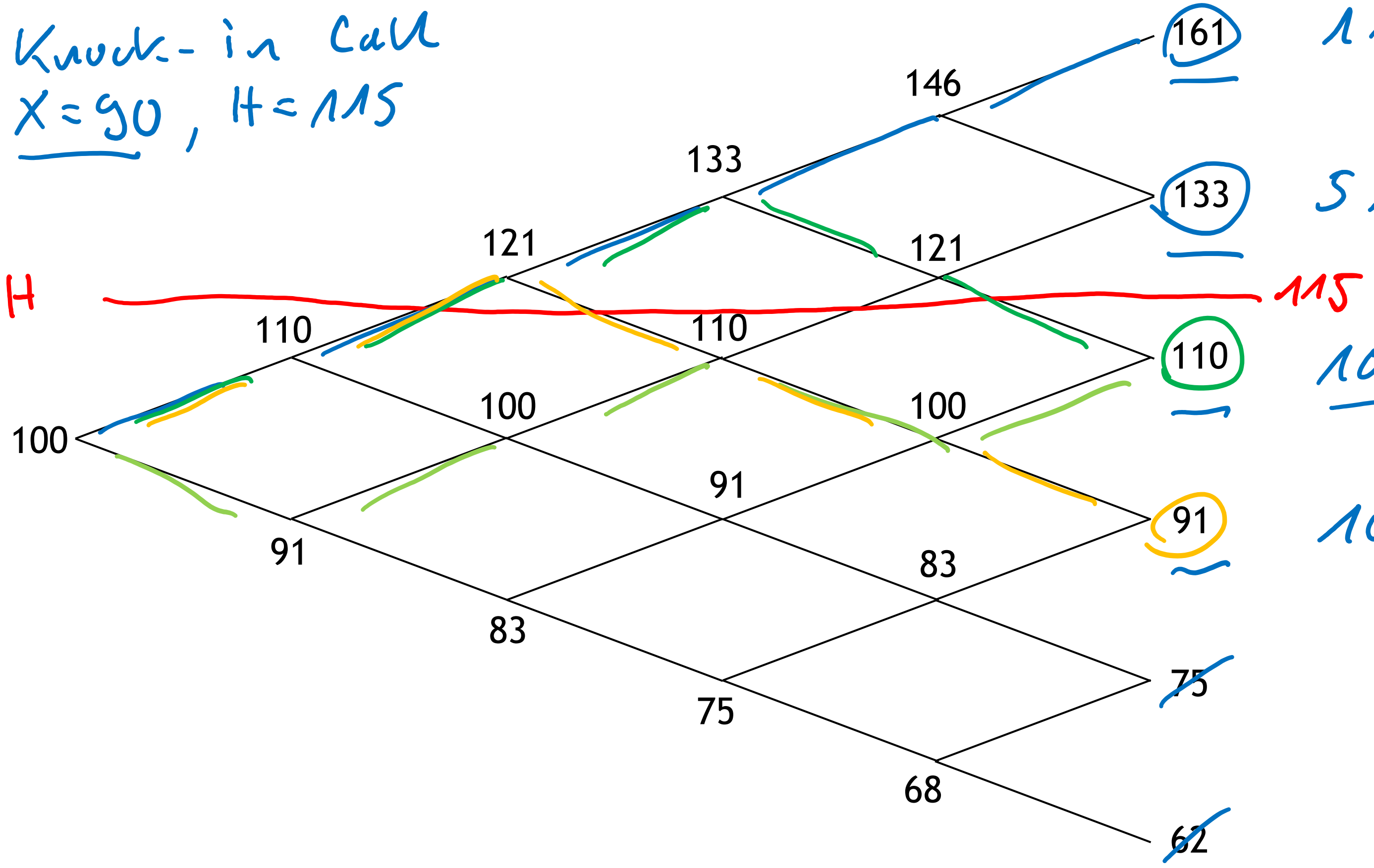
PUT	Knock-out	Knock-in
Up	Up-and-out Put	Up-and-in Put
Down	Down-and-out Put	Down-and-in Put

Binomialbaum

- Da in Binomialbäumen der Aktienkursverlauf modelliert wird, ist die Bewertung von Barriere-Optionen mit diesem Verfahren problemlos möglich.

Knock-in Call

$X = 90$, $H = 115$



Plain-Vanilla	Barriere
1x	1x
5x	5x
10x	5x
10x	1x

Erweiterung von Black-Scholes

- 1. Schritt: Plain Vanilla Call oder Put berechnen
- 2. Schritt: Lambda und Gamma berechnen

$$\lambda = \frac{r - q + \sigma^2/2}{\sigma^2}$$

Barriere

$$\gamma = \frac{\ln[H^2/(S_0 X)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

- 3. Schritt: x_1 und y_1 berechnen

$$x_1 = \frac{\ln(S_0/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$y_1 = \frac{\ln(H/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

- 4. Schritt: Optionspreis berechnen

Erweiterung von Black-Scholes – Calls (1/2)

- Barriere tiefer als Strike:
  - Up-and-in Call: Wert des Plain Vanilla Calls
  - Up-and-out Call: Null

- Barriere höher als Strike:
  - Up-and-in Call

$$c_{ui} = S_0 N(x_1)e^{-qT} - Xe^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} [N(-\gamma) - N(-y_1)]$$
$$+ Xe^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} [N(-\gamma + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})]$$

  - Up-and-out Call

$$c_{uo} = c - c_{ui}$$

Erweiterung von Black-Scholes – Calls (2/2)

- Barriere tiefer als Strike:
  - Down-and-in Call

$$c_{di} = S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(\gamma) - Xe^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(\gamma - \sigma\sqrt{T})$$

  - Down-and-out Call

$$c_{do} = c - c_{di}$$

- Barriere höher als Strike:
  - Down-and-out Call

$$c_{do} = S_0 N(x_1) e^{-qT} - Xe^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(\gamma_1)$$
$$+ Xe^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(\gamma_1 - \sigma\sqrt{T})$$

  - Down-and-in Call

$$c_{di} = c - c_{do}$$

Erweiterung von Black-Scholes – Puts (1/2)

- Barriere tiefer als Strike:
  - Up-and-out Put

$$p_{uo} = -S_0 N(-x_1) e^{-qT} + X e^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(-y_1) - X e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})$$

  - Up-and-in Put

$$p_{ui} = p - p_{uo}$$

- Barriere höher als Strike:
  - Up-and-in Put

$$p_{ui} = -S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(-\gamma) + X e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(-\gamma + \sigma\sqrt{T})$$

  - Up-and-out Put

$$p_{uo} = p - p_{ui}$$

Erweiterung von Black-Scholes – Puts (2/2)

- Barriere tiefer als Strike:
  - Down-and-in Put

    $$p_{di} = -S_0 N(-x_1)e^{-qT} + Xe^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda}[N(\gamma) - N(y_1)]$$
    $$-Xe^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}[N(\gamma - \sigma\sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{T})]$$

  - Down-and-out Put

    $$p_{do} = p - p_{di}$$

- Barriere höher als Strike:
  - Down-and-in Put: Wert des Plain Vanilla Put
  - Down-and-out Put: Null

Beispiel (1/2)

- Wert eines Knock-in und eines Knock-out Calls?
  - Aktueller Aktienkurs: $S_0 = 200$
  - Volatilität: $\sigma = 20\%$
  - Ausübungspreis: $X = 205$
  - Risikoloser Zinssatz p.a.: $r_f = 2\%$ (stetig)
  - Laufzeit: $t = 1$
  - Barriere: $H = 250$
  - Dividendenrendite: $q = 0\%$

1) Call Plain Vanilla BS $= 15{,}50$

2) $$\lambda = \frac{0{,}02 - 0 + \frac{0{,}2^2}{2}}{0{,}2^2} = 1{,}00$$

$$y = \frac{\ln\left(\frac{250^2}{200 \cdot 205}\right)}{0{,}2 \cdot \sqrt{1}} + 1{,}00 \cdot 0{,}2 \cdot \sqrt{1} = 2{,}31$$

3) $$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{200}{250}\right)}{0{,}2 \cdot \sqrt{1}} + 2{,}31 \cdot 0{,}2 \cdot \sqrt{1} = -0{,}92$$

$$y_1 = \frac{\ln\left(\frac{250}{200}\right)}{0{,}2 \cdot \sqrt{1}} + 2{,}31 \cdot 0{,}2 \cdot \sqrt{1} = 1{,}32$$

Beispiel (2/2)

- Wert eines Knock-in und eines Knock-out Calls?

4) $\underline{C_{ui}} = 200 \cdot N(-0{,}92) - 205 \cdot e^{-0{,}02 \cdot 1} \cdot N(-0{,}92 - 0{,}2 \cdot \sqrt{1}) - 200 \cdot \left(\frac{250}{200}\right)^{2 \cdot 1{,}00} \cdot$

$[N(-1{,}00) - N(-1{,}32)] + 205 \cdot e^{-0{,}02 \cdot 1} \cdot \left(\frac{250}{200}\right)^{2 \cdot 1{,}00 - 2} \cdot$

$[N(-1{,}00 + 0{,}2 \cdot \sqrt{1}) - N(-1{,}32 + 0.2 \cdot \sqrt{1})] = 12{,}48$

5) $C_{uo} = 15{,}50 - 12{,}48 = 3{,}02$